Analysis I und II
Prof. R. Pink

Zusammenfassung

Jonas Huber

Rev. 30 bis 101, 25.7.2008

1 Grundstrukturen

Vollständige Induktion Zuerst für den kleinsten (einfachsten) Wert zeigen (*Verankerung*), dann $x_n \Rightarrow x_{n+1}$ o. ä. unter Anwendung der Induktionsannahme zeigen (*Induktionsschritt*).

Binomialkoeffizient $\binom{m}{n} := \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq n \leq m$
Binomische Formel: $(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} a^n b^{m-n}$. Pascal'sches Dreieck: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Absolutbetrag $|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$
Eigenschaften: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $|x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x-y| \geq |x| - |y|$ (Dreiecksungleichung) . Überall stetig, aber in 0 nicht differenzierbar.
Sollen stückweise definierte Funktionen durch Beträge ausgedrückt werden, geht das meistens nur über einen Ansatz und dann „ausprobieren" der Parameter.

Supremum vs. Maximum Das Supremum (Infimum) ist die *kleinste* (grösste) *obere* (untere) Schranke. Im Unterschied zum Maximum (Minimum) muss es *nicht* in der Menge enthalten sein: $\sup(a, b) = b,\ \sup[a, b] = b$.

Mengenoperationen Vereinigungsmenge („A oder B"): $A \cup B$, Durchschnitt („A oder B"): $A \cap B$, Differenzmengen („A ohne B"): $A \setminus B$.

Koordinatensysteme *Polarkoordinaten:* $r \geq 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arg(x, y)$ wobei arg der eindeutige Winkel in $(-\pi, \pi]$ ist. Umgekehrt: $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$.
Zylinderkoordinaten: Gleich, aber zusätzlich $z = z$. Allg.: $\arg(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ für $x > 0$.
Kugelkoordinaten: $x = r \cos\vartheta \cos\varphi$, $y = r \cos\vartheta \sin\varphi$, $r \sin\vartheta$; r: analog, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: Winkel zur xy-Ebene, $\varphi \in (-\pi, \pi]$: Argument der Projektion auf xy-Ebene.

Kronecker-Delta $\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

Vektoralgebra Ein Punkt und sein Orsvektor können als das selbe Ding betrachtet werden.
Rechenregeln: Addition und Multiplikation „normal“ (assoziativ, etc.).
Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.
Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $\lambda\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\vec{a} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{a} \cdot \vec{x} + \vec{a} \cdot \vec{y}$.
Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$; $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$, $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ in dieser Reihenfolge Rechtssystem. Rechenregelen: $\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, $\vec{a} \times (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{a} \times \vec{y}$. *Spatprodukt:* Drei linear *un*abhängige Vektoren spannen Spat mit $V > 0$ für Rechtssystem auf (Linkssystem: $-V$). $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Komplexe Zahlen *Polarform:* $z = re^{\imath\varphi} = r(\cos\varphi + \imath \sin\varphi)$; $re^{\imath\varphi} \cdot r' e^{\imath\varphi'} = (r \cdot r') e^{\imath(\varphi + \varphi')}$, $z^n = r^n e^{\imath n\varphi}$.
Komplexe Konjugation: $\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\imath}$; $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$; $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$, $\arg \overline{z} = -\arg z$.

Argument: $\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$

Wurzeln: Es gibt *keine* natürliche Wurzel einer komplexen Zahl! Schreibe nie $\sqrt[n]{z}$! Löse stattdessen die Gleichung: $z = r \cdot e^{\imath\varphi} \Rightarrow w = \sqrt[n]{r} e^{\imath \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Fundamentalsatz der Algebra Jedes Polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0$ besitzt *mindestens eine* Nullstelle in $\mathbb{C}$. D. h. jedes solche Polynom lässt sich schreiben als $p(z) = a_n(z - \zeta_1) \ldots (z - \zeta_n)$, (Polynomdivision!) wobei ζ_i Nullstelle. Mit rellen Koeffizienten ist für jede Nullstelle ζ_i auch $\overline{\zeta_i}$ eine Nullstelle.

2 Funktionen

Eine Funktion hat einen *Definitionsbereich* (domain(f)) , einen *Zielbereich* (range(f)) und einen *Wertebereich* (image(f)) , wobei der Wertebereich die Menge der Werte ist, die von der Funktion tatsächlich angenommen werden.

2.1 Eigenschaften von Funktionen

Injektivität, Surjektivtät und Bijektivität Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto f(x)$ heisst:
injektiv, falls $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
surjektiv, falls $\forall y \in Y\ \exists\ x \in X : f(x) = y$
bijektiv, falls injektiv *und* surjektiv.
Bem.: „streng monoton“ impliziert Injektivität im betreffenden Intervall!

Stetigkeit f ist „stetig in $x_0 \in X$“, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Eigenschaften: g: stetig, f: stetig $\Rightarrow f \circ g$ stetig. $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ ist stetig $\Leftrightarrow$ jedes f_i stetig. f ist stetig, wenn es in jedem Punkt stetig ist. Grundrechenarten sind stetig. Jede rationale Folge ist stetig (wo definiert). Ist f : Intervall $\longrightarrow$ Intervall bijektiv und stetig, dann ist f^{-1} stetig.

Häufig reicht bereits eine Lipschitz-Bedingung, um die Stetigkeit zu zeigen: $\forall x : |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|$. Ist eine Toleranz ε für die linke Seite vorgegeben, so reicht es, wenn $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{C}$ ist.

Weitere Eigenschaften f ist gerade, falls $f(-x) = f(x)$, und ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$; jeweils $\forall x \in \mathbb{R}$.

Zwischenwertsatz Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f *mindestens eine* Nullstelle in $[a, b]$. Wenn f stetig ist, bedeutet das, dass f jede reelle Zahl ξ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.

2.2 Grenzwerte

Grenzwert, Limes Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $a \in \overline{X}$. Dann hat f bei a den Grenzwert $b \in \mathbb{R}^m$, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.
f stetig in $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Wenn der Limes existiert ist er eindeutig. *Einseitige Grenzwerte:* Es kann sein, dass der Limes nur von rechts (rechtsseitig stetig!) oder links existiert oder die beiden Werte verschieden (Sprungstelle!) sind.

Uneigentliche Grenzwerte $\lim_{f \to a} f(x) = \infty$, falls $\forall N \; \exists \; \delta > 0 \; \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$. Für $\to -\infty$ analog, einfach mit $\cdots \Rightarrow f(x) < -N$.
Verhalten bei $\pm\infty$: $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; M \; \forall x \in X : x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; M \; \forall x \in X : x < -M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, falls $\forall N \; \exists \; M \; \forall x \in X : x > M \Rightarrow f(x) > N$, etc.

Rechenregeln Betrachte $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ mit $\lim_{x \to a} f(x) = b$.
Ist g stetig in $b \in Y$, so gilt $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x))$. Ist $\lim_{y \to b} g(y) = c$, so gilt $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$.
Majorantenkriterium: Ist $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ und $\forall x : |f(x)| \leq g(x)$, dann ist $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.
Minorantenkriterium: Sind $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\forall x : f(x) \geq g(x) : \lim_{x \to a} f(x) \geq \lim_{x \to a} g(x)$ falls beide existieren. Ist $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, dann ist auch $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.
$\lim(f + g) = \lim(f) + \lim(g)$, analog bei Mult. und Div.; $\lim(c \cdot f) = c \cdot \lim(f), \;\; c : \text{const.}$
Bernoulli de l'Hôpital: Ist $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ *oder* $\lim_{x \to a} f(x) = \pm \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls dieser existiert, $g'(x) \neq 0$ etc. Wiederholt anwendbar.

Asymptoten Zwei Funktionen f, g auf einer nach rechts unbeschränkten Teilmengen $X \subset \mathbb{R}$ heissen zueinander asymptotisch, falls $\lim_{x \to \infty} g(x) - f(x) = 0$ ist. Ist $g(x) = p \cdot x + q$ asymptotisch zu f, so nennt man $g(x)$ Asymptote von f. Analog für $x \to -\infty$.
Asymptoten finden durch probieren oder systematisch mit: $p = \lim_{x \to \infty} \frac{px+q}{x} \stackrel{!}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ und $q = \lim_{x \to \infty} f(x) - px$.

2.3 Folgen und Reihen

Folge Eine Abb. $\mathbb{Z}^{n_0} \longrightarrow X$ heisst (unendliche) Folge in X, $x \mapsto x_k$; man schreibt (x_k) Sie heisst konvergent,falls $\lim_{k\to\infty} x_k$ eigentlich existiert.

Reihe Ein Ausdruck $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ heisst Reihe. Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ bilden eine Folge (s_n). Die Reihe konvergiert, falls (s_n) konvergiert. Der Wert der Reihe ist dann $\lim_{n\to\infty} s_n$.
Alternierende Reihen konvergieren immer. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst *absolut konvergent,* wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Rechenregeln $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$; $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$;
$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$;
$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}$ falls die *linke* Seite absolut konvergiert.
$(\sum a_k) \cdot (\sum b_l) = \sum_k \sum_l a_k b_l = \sum_l \sum_k a_k b_k$ falls beide Reihen links absolut konvergent.

Wichtige Reihen *Geometrische Reihe:* $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = a_0 \frac{1}{1-q}$ $\forall q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.
n-te Partialsumme: $\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ divergiert für $0 < s \leq 1$, konvergiert für $s > 1$. Alternierende harm. Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2$.
Exponentialreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.
Binomialreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha$, mit $\varrho = 1$ und $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$, $\binom{\alpha}{0} := 1$.

Konvergenzkriterien für unendliche Reihen $\sum a_k$ konvergiert, falls:
Leibniz: (a_k) alternierend und $(|a_k|)$ monotone Nullfolge;
Majorantenkriterium: $|a_k| \leq c_k$ für fast alle k und $\sum c_k$ konvergent;
Quotientenkriterium: $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$ mit $0 < q < 1$ für fast alle k;
Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ mit $0 < q < 1$ für fast alle k.
Bei den letzten drei ist $\sum a_k$ sogar absolut konvergent.

2.3.1 Potenzreihen

Ausdruck der Form $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist Potenzreihe an der Stelle x_0. Mit $x_0 = 0$: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, auch im komplexen. Definiert auf dem Konvergenzbereich eine stetige, diff'bare Funktion. Im Inneren des Konvergenzkreises darf man Potenzreihen gliedweise differenzieren und integrieren. Jede Summe, Produkt, Quotien und Komposition von Potenzreihen lässt sich wieder als Potenzreihe entwickeln. Die Umkehrfunktion einer Potenzreihe ist wieder eine Potenzreihe. Zwei konvergente Potenzreihen darf man „distributiv“ miteinander multiplizieren.

Konvergenzradius Falls $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ existiert ist er gleich dem Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe. Die Reihe konvergiert dann im Inneren des Kreises um x_0 mit Radius ϱ. Auf dem Rand: Separat abklären!

2.4 Exponentialfunktion

$\exp z = \mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Eigenschaften $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
$\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t^q} = \infty$ und $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, $q \in \mathbb{N}$, d. h. die Exponentialfkt. wächst schneller als jede feste Potenz von t.

Natürlicher Logarithmus $\log = \ln : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von exp.
Eigenschaften: $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ und $\lim_{x\to 0+}(x^\alpha \log x) = 0$ für feste $\alpha > 0$.
Rechenregeln: ▶ $\log e^x = x$; ▶ $e^{\log x} = x$; ▶ $\log xy = \log x + \log y$; ▶ $\log x^n = n \cdot \log x,\ n \in \mathbb{Z}$; ▶ $\log \frac{1}{x} = -\log x$.

2.4.1 Hyperbolische Funktionen

▶ $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ▶ $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ▶ $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Umkehrfunktionen: ▶ $\operatorname{arsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ ▶ $\operatorname{arcosh} y = \log(y + \sqrt{y^2-1}),\ y \geq 1$ ▶ $\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y},\ -1 < y < 1$. Reihenentwicklungen: Tabelle.

3 Differentialrechnung

3.1 Ableitung

f ist differenzierbar in $x_0 \in X$ mit Ableitung $f'(x_0)$, falls $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h)$ für $h \to 0$.

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Wenn f in allen $x_0 \in X$ differenzierbar ist, ergibt sich eine neue Funktion f'.
Differenzierbar $\Rightarrow$ stetig.
Rechenregeln: ▶ $(f+g)' = f' + g'$ und $(\lambda f)' = \lambda f'$; ▶ $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; ▶ $(\frac{f}{g})' = \frac{f'\cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
▶ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(f(t)) = g'(f(t)) \cdot f'(t)$ (Kettenregel).

Extrema Jede lokale Extremalstelle im Inneren eines Intervalls ist ein kritischer Punkt: $b_0 \in B$ mit $f'(b_0) = 0$. *Auch die Randpunkte* können das Minimum oder Maximum auf dem Intervall sein! → Kandidaten: kritische und Randpkte; dann jeweils f berechnen und grössten bzw. kleinsten Wert suchen.

3.2 Mittelwertsatz

Ist f auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar, dann existier $\tau \in]a,b[$ so, dass $f'(\tau) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Alternativ: *Satz von Rolle:* Ist zusätzlich $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\tau \in]a,b[$ mit $f'(\tau) = 0$.
Alternative Formulierung des Mittelwertsatzes: Seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $]a,b[$ und $g'(t) \neq 0\ \forall t \in]a,b[$ und $g(b) \neq g(a)$, dann existiert $\tau \in]a,b[$ mit $\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3.3 Taylor-Approximation

Taylorpolynom $j_a^n f(t) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(n)}(a)}{k!} \cdot (t-a)^k$ heisst „n-tes Taylorpolynom von f an der Stelle a". Durch $f(t) = j_a^n f(t) + R_n(t)$ ist das n*-te Restglied* definiert. *Satz von Taylor:* Es existiert τ zwischen a und t so ($\tau \in [a,b]$), dass $R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} \cdot (t-a)^{(n+1)}$. Folge: $f(t) = j_a^n f(t) + o((t-a)^n)$.

Taylorreihe Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ heisst Taylorreihe von f an der Stelle a.
Vorsicht: Im Allg. hat die Taylorreihe Konvergenzradius 0. Auch wenn $\varrho \neq 0$, stellt die Taylorreihe im Allg. *nicht* die Funktion f dar.

Newton-Verfahren Nullstellenapproximation mittels Intervallschachtelung. Tangente an Graph in $(x_n, f(x_n))$, Schnittpunkt mit x-Achse $\to (x_{n+1}, 0)$, etc. Rekursionsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Unter Umständen muss man beachten, dass x_0 nahe genug bei der vermuteten Nullstelle ξ gewählt wird.

3.4 Kurvendiskussionen

Konvex und konkav Eine (nach unten) *konvexe* Funktion liegt immer *über* ihrer Tangente. Eine *konkave* Funktion hingegen hängt *unter* ihren Tangenten.
Äquivalent sind folgende Dinge: f ist konvex; f' ist monoton wachsend; $f'' \geq 0$; $Graph(f)$ liegt oberhalb jeder Tangente.
Wechsel von konkav nach konvex (oder umgekehrt): Wendepunkt.

Wichtiges Sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Sei $t_0 \in I$ und $n \geq 2$ mit $f'(t_0) = \cdots = f^{(n-1)}(t_0) = 0$ und $f^{(n)}(t_0) \neq 0$.
▶ Ist n gerade und $f^{(n)}(t_0) > 0$, dann hat f in t_0 ein lokales Minimum.
▶ Ist n gerade und $f^{(n)}(t_0) < 0$, dann hat f in t_0 ein lokales Maximum.
▶ Ist n ungerade, dann hat f in t_0 einen Wendepunkt bzw. Sattelpunkt.

3.5 Differentialgleichungen I

Lineare Differentialgelichungen Einge DGl der Form $Ly = y^n + f_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$ heisst linear. Sie ist *homogen,* falls $g(x) = 0$ ist, sonst *inhomogen.*

mit konstanten Koeffizienten Statt f_{n-1} schreibt man a_{n-1} etc., wobei $a_{n-1}, \ldots, a_0$ konstant sind. Man findet die richtige Anzahl n Fundamentallösungen durch Ansatz bzw. mittels des charakterisitischen Polynoms. Es gilt nämlich: $\mathrm{e}^{\lambda x}$ ist Lösung von $Ly \Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert (Nullstelle) von L.

Hat L genau n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so sind $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ Fundamentallösungen. Die allg. Lösung ist dann $A_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + A_n\mathrm{e}^{\lambda_n x}$ für Konstanten $A_1, \ldots, A_n$. Konstanten aus Anfangsbedingungen.

Komplexe Nullstellen: Sind $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ und ist $\mu \pm \imath\nu$ ein Paar nicht reeller Eigenwerte, dann entsprechen diesen die reellen Fundamentallösungen $\mathrm{e}^{\mu x}\cos \nu x$ und $\mathrm{e}^{\mu x}\sin \nu x$.

Mehrfache Nullstellen: Zu jeder m-fachen Nullstelle λ von $\mathrm{ch}_L(\lambda)$ gehören die m linear unabhängigen Fundamentallösungen $\mathrm{e}^{\lambda x},\ x\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$. Bei nichtreellen Nullstellen analog beim sin- und cos-Term x bis x^{m-1} ranmultiplizieren.

charakteristisches Polynom Das charakteristische Polynom von L bzw. von $Ly = 0$ (der *homogenen* Gleichung)(!) ist: $\mathrm{ch}_L(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Seine Nullstellen, die auch $\in \mathbb{C}$ sein können (!), heissen Eigenwerte.

inhomogener Fall Grundsätzlich gilt: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, d. h. die allg. Lösung ist die Summe der Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung.

Partikuläre Lösung durch Ansatz: Ist λ *kein* Eigenwert von L, so hat die Gleichung $Ly = e^{\lambda x}$ eine part. Lösung der Form $Be^{\lambda x}$. Weitere $g(x)$ mit Ansätzen (jew. nach dem Pfeil):
▶ $Ly = p(x)e^{\lambda x}$, $p(x)$: Polynom Grad r, λ *kein* Eigenwert $\longrightarrow q(x)e^{\lambda x}$, $g(x)$: Polynom vom Grad r.
▶ Wie oben, aber λ Eigenwert der Multiplizität m: $\longrightarrow q(x)$: Polynom vom Grad $r + m$.
▶ L mit reellen Koeff. und *nicht* Eigenwerte $\mu \pm \imath\nu$, $Ly = A_1 e^{\mu x} \cos \nu x + A_2 e^{\mu x} \sin \nu x \longrightarrow B_1 e^{\mu x} \cos \nu x + B_2 e^{\mu x} \sin \nu x$, B_1, B_2 konstant.
▶ Wie oben, aber $\mu \pm \imath\nu$ Nullstellen der Ordnung m, $p_1(x)$ und $p_2(x)$ Polynome vom Grad $\leq r$: $Ly = p_1(x)e^{\mu x} \cos \nu x + p_2(x)e^{\mu x} \sin \nu x \longrightarrow q_1(x)e^{\mu x} \cos \nu x + q_2(x)e^{\mu x} \sin \nu x$ für Polynome $q_1(x)$ und $q_2(x)$ vom Grad $\leq r + m$.

Ansatz in DGl einsetzen und dann durch Koeffizientenvergleich die Konstanten bestimmen.

Spektrum $\operatorname{spec} L = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ Als Spektrum im Zusammenhang mit dem charakterisitischen Polynom bezeichnet man die Menge der Nullstellen (komplex und reell) desselbigen.

$g(t)$	Spektralbedingung	Ansatz für $y_p(t)$
t^r	$0 \notin \operatorname{spec} L$ $0 \in \operatorname{spec} L$, m-fach	$A_0 + A_1 t + \dots + A_r t^r$ $A_0 t^m + A_1 t^{m+1} + \dots + A_r t^{m+r}$
$b_0 + b_1 t + \dots + b_r t^r,\ b_i \in \mathbb{R}$	$0 \notin \operatorname{spec} L$	$A_0 + A_1 t + \dots + A_r t^r$
$e^{\lambda_0 t},\ \lambda_0 \in \mathbb{C}$	$\lambda_0 \notin \operatorname{spec} L$ $\lambda_0 \in \operatorname{spec} L$, m-fach	$Ae^{\lambda_0 t}$ $At^m e^{\lambda_0 t}$
$\cos(\omega t),\ \sin(\omega t)$	$\pm\imath\omega \notin \operatorname{spec} L$ $\pm\imath\omega \in \operatorname{spec} L$, einfach	$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ $t(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$
$t^2 e^{-t}$	$-1 \notin \operatorname{spec} L$	$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)e^{-t}$

Einfachere Tabelle:

$g(x)$	$y_p(x)$	$g(x)$	$y_p(x)$
$a = const$	A	$\cos(cx)/\sin(cx)$	$A\sin(cx) + B\cos(cx)$
$ax + b$	$Ax + B$	Ae^{bx}	Ae^{bx}
$ax^2 + bx + c$	$A^2x^2 + Bx + C$		

4 Integralrechnung

4.1 Integralbegriff

Riemann-Integral Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine *Zerlegung* Z von $[a, b]$ besteht aus endlich vielen Punkten $a = b_0 < b_1 < \dots < b_n = b$ zusammne mit Zwischenpunkten $x_i \in [b_{i-1}, b_i]$ für alle i. Die *Feinheit* von Z ist $\delta(Z) := \max\{b_i - b_{i-1} | i = 1, \dots, n\}$.
Riemannsche Summe: $S_f(Z) := \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (b_i - b_{i-1})$. Dies konvergiert für $\delta(Z) \to 0$ und der Grenzwert ist das Riemann-Integral von f über $[a, b]$.

integrierbar f ist integrierbar, wenn obiger Grenzwert existiert. Ausserdem: stetig $\Rightarrow$ integrierbar, ebenso reicht die stückweise Stetigkeit (immer ein Integral pro stetigem Bereich verwenden).

4.2 Hauptsätze und Eigenschaften

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung Version A: „Integration und Differentiation sind zueinander invers.“ Version B: Sei f auf $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Rechenregeln ► $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ falls $a < b < c$.
► $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
► $\int_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$ für λ konstant.
► $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ falls $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$.
► $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
► $\int_B 1\, d\mu = \mu(B)$. ► $\int \Re f(t)dt = \Re \int f(t)dt$ ► $\int \Im f(t)dt = \Im \int f(t)dt$.

Mittelwertsatz der Integralrechnung Nimmt die Funktion $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen $\eta_* := \inf_{x\in B} f(x)$ und $\eta^* := \sup_{x\in B} f(x)$ tats. an, so $\exists$ einen Pkt. $\xi \in B$ mit $\int_B f\, d\mu = f(\xi)\mu(B)$.

4.3 Integrationstechniken

Partielle Integration: ► $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$; ev. kennzeichnen mit $\downarrow$: ableiten, $\uparrow$ integrieren.
Substitution: ► $\left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(y), dx=\varphi'(y)dy} = \int f(\varphi(y))\varphi'(y)dy$. *Vorsicht* mit dem Definitionsbereich der Substitution! Beim *bestimmten Integral:* Grenzen mittransformieren und dann die „neue“ Fkt. über den „neuen“ Bereich integrieren – Rücktsubstitution entfällt! Standardsubstitutionen:

Integral	Substitution	Differential	Bemerkungen
$\int f(x, \sqrt{ax+b})dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2t\,dt}{a}$	$t \geq 0$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$	$x = \alpha t + \beta$	$dx = \alpha dt$	Wähle $\alpha, \gamma > 0$ und β so, dass gilt: $ax^2 + bx + c = \gamma^2 \cdot (1 - t^2)$ oder $= \gamma^2 \cdot (1 + t^2)$ oder $= \gamma^2 \cdot (t^2 - 1)$.
$\int f(x, \sqrt{1-x^2})dx$	$x = \sin t$	$dx = \cos t\, dt$	$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{pi}{2}$
$\int f(x, \sqrt{1+x^2})dx$	$x = \sinh t$	$dx = \cosh t\, dt$	$t \in \mathbb{R}$
$\int f(x, \sqrt{x^2-1})dx$	$x = \cosh t$	$dx = \sinh t\, dt$	$t \geq 0$
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x)dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{dt}{t}$	$t > 0$, und dabei gilt $\sinh x = \frac{t^2-1}{2t}$, $\cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x)dx$	$\tan \frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, und dabei gilt $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Partialbruchzerlegung Für teilerfremde Polynome $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ und ein weiteres Polynom $f(x)$ existieren Polynome $f_i(x)$ vom Grad kleiner als der von $g_i(x)$ sowie ein Polynom $h(x)$, so dass gilt:

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\ldots g_n(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \cdots + \frac{f_n(x)}{g_n(x)} + h(x)$$

Wobei der Grad von $h(x) \leq$ Zählergrad $-$ Nennergrad der linken Seite ist. Jeder Nennerfaktor der Form $(x - \alpha)^l$ gibt Anlass zu einem Summand der Form $\frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \frac{A_{l-1}}{(x-\alpha)^{l-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-\alpha}$ und jeder quadratische Nennerfaktor $Q(x) = (x - \beta)^2 + \gamma^2 = x^2 + bx + c$ zu einem Summand der Form $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$.

4.4 Uneigentliche Integrale

Ist f auf $]a,b[$ stetig und ist a und/oder $b = \pm\infty$ oder f bei a oder b unbeschränkt, so ist das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s\to a+} \lim_{t\to b-} \int_s^t f(x)dx$$

falls existent, sonst divergiert es. Wichtig: Limes für beide Grenzen *separat* betrachten! Wenn bekannt, dass existent, darf man auch nur einen Limes bilden, z. B. $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)dx$.
Achtung: Auch z. B. $\int_{-5}^5 \frac{1}{x}dx$ ist uneigentlich: Singularität bei $x = 0$.

Konvergenzkriterien *Majorantenkriterium 1:* Sei f auf $[a,\infty[$ stetig und $|f(x)| \leq \frac{c}{x^\alpha}$ mit $s > 1, c > 0$. Dann konvergiert $\int_a^\infty f(x)dx$.
Minorantenkriterium 1: f wie oben und $c > 0$ und $|f(x)| \geq \frac{c}{x}$. Dann divergiert $\int_a^\infty f(x)dx$.
Majorantenkriterium 2: Ist $|f(x)| < \frac{c}{(x-a)^s}$ für $s < 1$, dann konvergiert $\int_a^b f(x)dx$ $(a < b < \infty)$.
Minorantenkriterium 2: Ist $|f(x)| \geq \frac{c}{x-a}$ für $c > 0$, so divergiert $\int_a^b f(x)dx$.
$\int_1^\infty x^{-s}dx < \infty \Leftrightarrow s > 1$ und $\int_0^1 x^{-1}dx < \infty \Leftrightarrow s < 1$.

4.5 Mehrdimensionale Integration

Riemann-Integral analog wie in 1d: Man zerlegt den Bereich über den man integrieren will in viele kleine Bereiche, deren Volumen (μ, auch Fläche) man dann gegen 0 gehen lässt. Riemann-Summe: $S_f(Z) := \sum_{i=1}^n f(z_i) \cdot \mu(B_i)$; Riemann-Integral: $\int_B f(z)d\mu(z) := \lim_{\delta(Z)\to 0} S_f(Z)$, falls Limes existiert. Ist B kompakt (abgeschl. u. beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$) und f auf B stetig, existiert er.

Eigenschaften Wie jene des eindimensionalen Integrals plus zusätzlich:
▶ $\int_B + \int_A = \int_{A\cup B} + \int_{A\cap B}$ ▶ $\int_B f(z)d\mu(z) = 0$ falls $\mu(B) = 0$ ▶ $\int_B 1\, d\mu(z) = \mu(B)$.

Satz von Fubini Sind $f, g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f \leq g$ und $A := \{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) | (x_1,\ldots,x_n) \in B,\ f(x_1,\ldots,x_n) \leq x_{n+1} \leq g(x_1,\ldots,x_n)\}$. Dann gilt:

$$\int_A h(x_1,\ldots,x_{n+1})d\mu(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \int_B \left(\int_{f(x_1,\ldots,x_n)}^{g(x_1,\ldots,x_n)} h(x_1,\ldots,x_{n+1})dx_{n+1} \right) d\mu(x_1,\ldots,x_n)$$

Skuzessive angewandt: Reduktion beliebiger Dimension auf 1!
Spezialfall: Rechteckiger Bereich der Form $[a,b]\times[c,d]$ etc. werden so behandelt: $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$.

Ändern der Integrationsreihenfolge Man hat z. B. $\int_0^2 (\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)dx)dy$ und möchte jetzt *innen* über y integrieren. ▶ Grundsätzlich zuerst Skizze des Bereichs, über den man integriert, machen und ▶ dann die Grenzen nach der anderen Variablen auflösen und das entsprechende Integral hinschreiben. Vorsichtig sein!

Schwerpunkt Sei m Massendichte, A das Objekt. Gesamtmasse $= \int_A m(x)d\mu(x)$; Schwerpunkt:

$$S = \frac{\int_A m(x)\cdot x\,d\mu(x)}{\int_A m(x)d\mu(x)} \quad \text{und mit } m = const.: \quad S = \frac{\int_A x\,d\mu(x)}{\mu(A)}$$

Dabei ist x immer ein Vektor mit zwei oder drei Komponenten: $x = (x, y, z)$!

Trägheitsmoment Für konstante Dichte ϱ: $J = \varrho \int_V r^2\,\mathrm{d}V$, wobei r der Abstand zum Bezugspunkt ist; also $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, falls Ursprung Bezugspunkt. Falls Dichte nicht konstant: $\varrho(r)$ unter das Integral.

Integration in Polarkoordinaten etc. Zu $B \subset \mathbb{R}^2$ setze: $\tilde{B} := \{(r,\varphi)|r \geq 0, -\pi \leq \varphi \leq \pi,$ $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\}$. ▶ $\int_B f(x,y)d\mu(x,y) = \int_{\tilde{B}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot d\mu(r,\varphi)$ (wobei $d\mu(r,\varphi) = dr\,d\varphi$).
Rotationskörper:▶ $\iiint_K g(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_0^{f(z)} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\cdot\varrho\cdot d\varphi\,d\varrho\,dz$
wobei $K := \{(x,y,z)|z \in [a,b], \sqrt{x^2+y^2} \leq f(z)\}$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ stetig.
Kugelkoord.: ▶ $\int_B f(x,y,z)d\mu(x,y,z) = \int_{\tilde{B}} f(r\cos\vartheta\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta)\cdot r^2\cos\vartheta\cdot d\mu(r,\varphi,\vartheta)$
wobei $\tilde{B} := \{(r,\varphi,\vartheta)|r \geq 0, -\pi \leq \varphi \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, (r\cos\vartheta\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta) \in B\}$.

4.6 Differentialgleichungen III

separierbare Differentialgleichungen Form: $y' = g(x)\cdot k(y)$. ▶ Konstante Lösung $y = y_0$ falls $k(y_0) = 0$ ist. Sonst: ▶ $\frac{1}{k(y)}\cdot\frac{dy}{dx} = g(x) \Rightarrow \int \frac{1}{k(y)}dy = \int g(x)dx$ ▶ *Integrationskonstante!* Integrationskonstante auf einer Seite!!! Nach dem Integrieren kann man versuchen, nach y aufzulösen. Falls bereits *Anfangswerte* gegeben sind: Bestimmt integrieren, links von y_0 bis y und rechts von x_0 bis x.

Allg. lin. DGl. erster Ordnung Form: $y' = p(x)y + q(x)$, p, q stetige Fkt. von x. *Homogene Gleichung* $Y' = p(x)\cdot Y$ kann durch Separation gelöst werden und führt auf ▶ $Y = C\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)dx}$ als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

Inhomogener Fall mit *Variation der Konstanten:* Ansatz: $y(x) = C(x)Y(x)$. Einsetzen in die ursprüngliche GDl ergibt $C'(x) = \frac{q(x)}{Y(x)}$, was sich durch integrieren lösen lässt (*Integrationskonstante!*). Allg. Lösung des inhomogenen Falles: $y = Y(x)\cdot(\int \frac{q(x)}{Y(x)}dx + C)$ (beim Integral: *Integrationskonstante* nicht vergessen!).

Var. d. Konst. für lin. DGl. zweiter Ordnung: Allg. Lös.: $y = \frac{1}{2}\log\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\cos x + C_1\sin x + C_2\cos x$.

Homogene Differentialgleichungen Nicht linear! Form: $\frac{dy}{dx} = f(x,y) = f(1, \frac{y}{x})$. Nun substituiert man: $u = \frac{y}{x}$, $\frac{du}{dx} = \frac{f(1,u)-u}{x}$; nun hat man eine separierbare DGl in u, lösen, rücksubstituieren.

Substitution bei Differentialgleichungen Wenn man z. B. die Substitution $x = \sin t$ durchfürht, müssen nun die vorkommenden Ableitungen von y *nach* t bestimmt werden:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}$$

Das ergibt DGL in der Variablen t, die nun lösbar sein sollte; ganz am Schluss: Rücksubstitution.

5 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Hier kann x etc. auch immer für einen Vektor stehen!

Partielle Ableitung f heisst „partiell differenzierbar“ in $x = (x_1, \vdots, x_n) \in U$ falls $\forall 1 \leq i \leq n$ die partielle Ableitung existiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) := \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots\right) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

.

Richtungsableitung Die Richtungsableitung von f bezüglich e im Punkt x ist ▶ $D_e f(x) := \frac{d}{dt}(f(x+te))$, sofern sie existiert. Für einen Vektor e, der nur Nullen und an der i-ten Stelle eine 1 enthält, erhält man die partielle Ableitung nach der entsprechenden Variablen.

Totales Differential / Gradient f ist tot. diffb. in $x = (x_1, \dots, x_n)$ falls $\exists\forall A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) = f(x_1, \dots, x_n) + A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + o\left(h_1, \dots, h_n\right)$. Der Vektor $\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (A_1, \dots, A_n)$ hiesst totale Ableitung oder *Gradient* von f.

Insbesondere ist $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$.

Näherungsformel: ▶ $f(x+h) - f(x) \cong \nabla f(x) \cdot h$. *Eigenschaften:* ▶ f heisst *stetig differenzierbar* oder C^1, falls differenzierbar und ∇f stetig ist. ▶ f stetig differenzierbar $\Leftrightarrow$ f partiell differenzierbar und alle $\frac{\partial f}{x_i}$ stetig. ▶ Der Gradientvektor zeit in Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion.

Tangentialebene Mit hilfe des Gradienten kann eine Tangentialebene an den Graphen berechnet werden: $\nabla f \cdot \lambda(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$ (Skalarprodukt!), λ ist parameter, vgl. unten.

Allgemeiner: Bei Niveauflächen (z. B. Ellipsoid) steht ∇f senkrecht zur Niveaufläche und daher gilt für den Normalenvektor einer Tangentialebene: $\lambda\vec{n} = \vec{\nabla} f$, d. h. $\vec{\nabla} f$ parallel zu $\vec{n}$.

Mehrdimensionale Kettenregel Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : I \longrightarrow U$ differenzierbar. Dann ist $I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x(t))$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} f\left(x(t)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x(t)\right) \cdot \frac{dx_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x(t)\right) \cdot \frac{dx_n}{dt}(t)$$

Ableitung unter Integral Sei B kompakt, I ein Intervall, $f(x,t)$ stetig für $x \in B$ und $t \in I$, und partiell differenzierbar nach t mit $\frac{\partial f}{\partial t}$ stetig. Dann ist $\Phi(t) := \int_B f(x,t) d\mu(x)$ stetig differenzierbar in t mit Ableitung ▶ $\Phi'(t) = \int_B \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu(x)$.
Sei $f(x,t)$ für $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und $a(t), b(t)$ differenzierbar. Dann ist die Funktion $\Psi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dx$ differenzierbar mit Ableitung ▶ $\frac{d\Psi}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(b(t),t) \frac{db}{dt} - f(a(t),t) \frac{da}{dt}$.

5.1 Höhere Ableitungen

f heisst m-fach differenzierbar, falls f (total) differenzierbar ist und jede partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(m-1)$-fach differenzierbar ist. Analog: m-fach stetig differenzierbar: C^m.
▶ Ist f C^m, so sind alle bis zur m-ten partiellen Ableitung *von der Reihenfolge* unabhängig!

Hesse-Matrix Gwissermassen die „zweite totale Ableitung“. Sie f C^2-Funktioni von n Variablen.

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Ist f C^2, so ist $\nabla^2 f$ symmetrisch.

Taylor-Entwicklung *2 Variablen:* Sei f eine C^m-Funktion von (x,y). ▶ $f(x,y) = \sum_{i,j\geq 0; i+j\leq m} \frac{1}{i!\cdot j!} \cdot \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial x^k}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^i(y-y0)^j + o(|(x-x_0,y-y_0)|^m)$. Achtung: Skalarprodukt!
Oder anders mit $P=(x,y)$ und $P_0=(x_0,y_0)$ (Taylor-Polynom zweiter Ordnung):
▶ $f(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(P-P_0) + \frac{1}{2}(P-P_0)^T \cdot \nabla^2 f(P_0)(P-P_0) + o(|P-P_0|^2)$.
Konkret für 2D: ▶ $j^2_{x_0,y_0} f(\Delta x, \Delta y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2)$

Laplace-Operator $\Delta = \operatorname{div}(\nabla f) = \langle \nabla, \nabla \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$; im $\mathbb{R}^3 : f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

Kritische Punkte Sei f (total) differenzierbar auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Punkt x_0 mit $\nabla f(x_0) = (0,\ldots,0)$ heisst kritischer Punkt von f. Jede *lokale Extremalstelle* von f ist ein kritischer Punkt (aber Vorscht: Rand und Ecken nicht vergessen!).

Der kritische Punkt x_0 hiesst *ausgeartet,* wenn $\det \nabla^2 f(x_0) = 0$, sonst *nicht ausgeartet.*

Ein *nicht ausgearteter* kritischer Punkt x_0 ist ein isoliertes
▶ lokales Minimum, wenn $\nabla^2 f(x_0)$ positiv definit;
▶ lokales Maximum, wenn $\nabla^2 f(x_0)$ negaitv definit;
▶ Sattelpunkt, wenn $\nabla^2 f(x_0)$ indefinit ist. Falls $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ist: ▶ positiv definit $\Leftrightarrow a > 0 \wedge ac - b^2 > 0$, ▶ negativ definit $\Leftrightarrow a < 0 \wedge ac - b^2 > 0$ und ▶ indefinit $\Leftrightarrow ac - b^2 < 0$.

5.2 Implizite Funktionen

Anwendung: Niveaulinien/-flächen. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^m-Funktion $(m \geq 1)$ und sei $L := \{(x,y) \in U | f(x,y) = 0\}$ und $(x_0,y_0) \in L$ ein Punkt mit $f_y(x_0,y_0) \neq 0$. Dann existieren offene Intervalle I', I'' mit $(x_0,y_0) \in I' \times I'' \subset U$, und eine C^m-Funktion $\varphi : I' \longrightarrow I''$ so, dass *Graph*$(f) = L \cap (I' \times I'')$ (d. h. innerhalb des Fensters $I' \times I''$ stimmt L mit dem Graphen von φ überein) und für alle $x \in I'$ gilt: ▶ $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$.
Ein Punkt $(x_0,y_0) \in L$ heisst *regulär,* wenn $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$ ist, sonst heisst er *singulär.*
Meist hat man eine Fkt. $F(x,y) = 0$, die nicht nach y oder x gelöst werden kann. y als $y = \varphi(x)$ einsetzen und Ableiten *nach KETTENREGEL (!).* Nach $\varphi(x)'$ lösen → Formel von oben. Zweite Ableitung: Nochmals stur nach Kettenregel ableiten, nach $\varphi(x)''$ lösen und ev. $\varphi(x)'$ einsetzen.

Mehrdimensional U, f wie oben, aber $L := \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in U | f(x) = 0\}$ und $x_0 = (x_{0,1},\ldots,x_{0,n+1}) \in L$ mit $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) \neq 0$. Dann existieren $V \in \mathbb{R}^n$ und $I \subset \mathbb{R}$ offen mit $x_0 \in V \times I$, sowie eine C^m-

Funktion $\varphi : V \longrightarrow I$ so, dass $Graph(\varphi) = L \cap (V \times I)$ ist und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}}(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n))$$

5.3 Die Funktionalmatrix

Bezieht sich auf *vektorwertige Funktionen* (im Gegensatz zur Hesse-Matrix). Die Matrix $\nabla f(x) := \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \ldots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$ heisst Funktionalmatrix von f oder Jacobi-Matrix. Ander geschrieben:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Eigenschaften: Die Matrix hat eine Invariante: ihren Rang: $0 \leq Rang(\nabla f(x_0)) \leq \min\{m, n\}$. f ist regulär in x_0, falls $Rang \nabla f = min\{m, n\}$. Das ist eine Verallgemeinerung: für $m = 1$ führt es auf die Bedingung von oben, dass $\nabla f = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}) \neq (0, \ldots, 0)$ sein darf bei regulären Punkten.

Funktionaldeterminante Für $m = n$ heisst $\det \nabla f$ die Funktionaldeterminante von f (oder Jacobideterminante). Der Betrag dieser Determinante ist der *lokale Volumenfaktor*: $vol(f(Q)) = |\det(\nabla f(x_0))| \cdot vol(Q) + o(vol(Q))$.

Kettenregel $\nabla(g \circ f) = \nabla g \cdot \nabla f$, d. h. $\nabla(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \cdot \nabla f(x)$

Differentierbarkeit, vektorwertig Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_m)$. f heisst differenzierbar (bzw. C^m), wenn jedes f_i es ist.
D. h. ► $f(x + h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + o(|h|)$, wobei ∇f die Funktionalmatrix ist. Das ist *die* Definition von Differentierbarkeit, auch im 1d!

Satz über inverse Funktionen Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow V$ eine C^m-Funktion für $k \geq 1$ und $x_0 \in U$ mit $\det \nabla f(x_0) \neq 0$. Dann existieren offene Teilmengen $U' \in U$ und $V' \in V$ mit $x_0 \in U'$ und $f(x_0) \in V'$ so, dass f eine bijektive Funktion $U' \longrightarrow V'$ induziert, deren Umkehrfunktion $g : V' \longrightarrow U'$ wieder C^k ist und $\nabla g(y) = (\nabla f(g(y)))^{-1}$; „lokal invertierbar". Das geht, weil für $m = n$ die Funktionalmatrix quadratisch und somit invertierbar ist!

Integralsubstitution Seien $B, \tilde{B} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig; $\varphi : \tilde{B} \longrightarrow B$ „fast überall" bijektiv, C^1 und $\det(\nabla f) \neq 0$. Dann gilt:

$$\int_B f(y)dy = \int_{\tilde{B}} f(\varphi(x)) \cdot |\det \nabla \varphi(x)| d\mu(x)$$

Geht auch im eindimensionalen: statt der Determinante steht einfach φ'. Z. B. bei Polar- und Kugelkoordinaten entstehen die Faktoren r bzw. $\varrho^2 \cos \vartheta$ auf diese Weise!

5.4 Extrema

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, nichtleer und $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann nimmt f auf B ein *globales* Minimum ein und ein globales Maximum an.

Extrema auf Bereichen mit Rand Vorgehen: ▶ Man bestimme alle kritischen Punkte von f im Inneren von B sowie ▶ die bedingt kritischen Punkte im „relativen Inneren" jeder d-dimensionalen Seitenfläche (auch Ränder), $0 < d < n$. ▶ Ausserdem betrachte man alle Eckpunkte des Bereichs. ▶ Nun können aus diesen Kandidaten mittels Wertevergleich das globale Maximum und Minimum gefunden werden.

Extrema mit Nebenbedingungen Seien $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und suche lokale Extrema von f auf $B = \{x \in U | g(x) = 0\}$, also unter der Bedingung $g(x) = 0$!

Sind f, g differenzierbar und x_0 ein lokales Extremum von f auf B, dann sind $\nabla f(x_0)$ und $\nabla g(x_0)$ *linear abhängig*, d. h. einer ist ein skalares Vielfaches des anderen.
▶ (a) $\nabla g(x_0) = (0, \ldots, 0)$ Singulärer Punkt auf B.
▶ (b) $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lagrange-Multiplikatoren Die bedingt kritischen Punkte vom Typ (b) von oben entsprechen genau den kritischen Punkten der Gesamtfunktion $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) := f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$ auf $U \times \mathbb{R}$. Also $\lambda F = (0, \ldots, 0) \longrightarrow$ Gleichungssystem! Meistens die Gleichungen $F_{x_i} = 0$ nach x_i in Abhängigkeit von λ lösen und dann in der Gleichung $F_\lambda = 0$ einsetzen und nach λ lösen.

Mehrere Nebenbedingungen Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen; $f, g_1, g_2, \ldots, g_m : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann sind für jede lokale Extremum x_0 von f auf $B := \{x \in U | g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}$ $\nabla f(x_0)$, $\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_m(x_0)$ linear abhängig.
▶ (a) $\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_m x_0$ linear abhängig: x_0 singulär auf B.
▶ (b) $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \cdots + \nabla_m g_m(x_0)$ für $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Lagrange: Für (b) sucht man auch hier die kritischen Punkte der Gesamtfunktion
$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) - \cdots - \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)$

5.5 Linien- und Flächenintegrale I

Linienintegral Sei $\varphi : [a, b] \longrightarrow L$ eine Parametrisierung, bijektiv, C^1, regulär ausser in endlich vielen Punkten. Dann gilt:

$$\int_L f(x) d\mu_1(x) = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| \cdot dt$$

Spezialfall: $f = 1$: Kurvenlänge $\mu_1(L) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$.

Flächenintegral Sei $\mathbb{R}^2 \supset B \xrightarrow{\varphi} F \subset \mathbb{R}^3$ stetig, differenzierbar, bijektiv. Dann gilt

$$\int_F f(x) d\mu_2(x) = \int_B f(\varphi(u, v)) \cdot |\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}| du\, dv$$

Wobei $|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}| du\, dv$ das Flächenelement ist.

6 Vektoranalysis

6.1 Vektorfelder und Linienintegrale

Vektorfeld Sie $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst *Skalarfeld* auf U. Eine Funktion $K : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heisst *Vektorfeld* auf U.

Feldlinie Eine parametrisierte Kurve $\gamma : [a,b] \longrightarrow U, t \mapsto \gamma(t)$ mit $\gamma'(t) = K(\gamma(t))$ heisst Feldlinie von K. Bsp.: In einem Strömungsfeld sind das genau die Trajektorien einzelner Teilchen des Mediums.

Potential Ist $K(x) = \nabla f(x)$ für ein C^1-Skalarfeld f, so heisst f ein *Potential* von K und K ist sein Gradientenvektorfeld. *Vorsicht mit Zeilen- und Spaltenvektoren!* Bsp.: Potential entspricht der potentiellen Energie, falls K ein Kraftfeld ist.

Ein C^1-Vektorfeld $K = (K_1, \dots, K_n)$ besitzt *lokal* genau dann ein Potential, wenn gilt: $\forall i, j : \frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i}$ Siehe auch Rotation!

Das Potential ist lokal eindeutig bestimmt bis auf eine konstante Funktion.

Berechnung eines Potentials im $\mathbb{R}^2$*:*
Sei $K = (P,Q)$, $(x,y) \subset U \subset \mathbb{R}^2$ und $U = I \times I'$ für Intervalle $I, I' \subset \mathbb{R}$. Gesucht: $f(x,y)$ C^1-Funktion auf U mit $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.
▶ Wähle Stammfunktion f_1 von P bezüglich x: $f_1 = \int P(x,y)dx$. Die Integrationskonstante darf von y abhängen!
▶ Ansatz $f(x,y) = f_1(x,y) + g(y)$, wobei $g(y)$ eben jene Integrationskonstante darstellt.
▶ $Q = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = Q - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ Hier darf die rechte Seite *nicht mehr* von x abhängen, sonst existiert kein Potential!
▶ Falls $Q - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ von x abhängt, existiert *kein* Potential. Andernfalls setze $g(y) := \int (Q - \frac{\partial f_1}{\partial y}) dy$.
▶ $f_1 + g$ ist das Potential.

Berechnung eines Potentials im $\mathbb{R}^3$*:* Für $K = (P, Q, R)$.
▶ Löse zuerst $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ in der Form $f = \int P\, dx + g(y,z)$. Die Integrationskonstante darf hier von y und z abhängen!
▶ Setze in $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ ein. Nun analog wie oben.

Vektorielles Linienintegral Sei K ein C^0-Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ eine C^1-Kurve. Dann gilt:

$$\int_\gamma K(x) \cdot dx := \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Achtung: *Skalarprodukt!* Ist K ein Kraftfeld, so ist das Linienintegral die Arbeit, die nötig ist, um ein Objekt längs γ zu bewegen.

Das Linienintegral hängt *nur* von K, der Bildkurve und deren Orientierung ab. Ist $\overline{\gamma}$ der selbe Weg rückwärts, dann ist $\int_{\overline{\gamma}} K(x)dx = -\int_\gamma K(x)dx$.

Für jeden geschlossenen Weg ist das Linienintegral $= 0$.

1. Integralsatz: Ist f ein C^1-Skalarfeld in $U \subset \mathbb{R}^n$ und γ ein Weg von P nach Q in U, so gilt:

$$\int_\gamma \nabla f(x) \cdot dx = f(Q) - f(P)$$

Insbesondere auch, wenn $f(x)$ das Potenzial des Vektorfeldes $K(x)$ ist, also $\nabla f(x) = K(x)$ gilt.

6.2 Integralsätze im $\mathbb{R}^2$

Rotation Sei $K = (P, Q)$ ein Vektorfeld. Dann ist die Rotation wie folgt definiert:

$$\operatorname{rot} K := Q_x - P_y = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \text{(2-dimensional)}$$

Allgemein:

$$\operatorname{rot} K := \nabla \times K = \begin{pmatrix} \partial_2 K_3 - \partial_3 K_2 \\ \partial_3 K_1 - \partial_1 K_3 \\ \partial_1 K_2 - \partial_2 K_1 \end{pmatrix}$$

Die Rotation ist die *lokale Zirkulationsrate* eins Vektorfeldes. Es gilt zusätzlich: $\operatorname{rot} K = 0 \Leftrightarrow K$ hat lokal ein Potential bzw. K ist ein Potentialfeld.

Randkurve und Orientierung Für $B \subset \mathrm{R}^2$ kompakt mit stückweise C^1-Rand bezeichnet ∂B die Randkurve so orientiert, dass B *in Fahrtrichtung immer links* liegt. Gilt auch innerhalbt eines Lochs in B.

Satz von Green Seien $B, \partial B$ wie oben und K ein C^1-Vektorfeld auf B. Dann gilt:

$$\int_{\partial B} K(x) \cdot dx = \int_B \operatorname{rot} K \cdot dx\, dy$$

Anwendung: Zur Berechnung des Integrals über B wähle ein Vektorfeld K so, dass $\operatorname{rot} K = f$ ist, dann wende Satz an.

Divergenz $\operatorname{div} K = P_x + Q_y = \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2}$ Allgemein: $\operatorname{div} K = \nabla \cdot K$. Also die Summe der Ableitungen der i-ten Komponente nach der i-ten Variable. Man kann die Divergenz als „punktuelle Produktionsrate“ auffassen.

Satz von Gauss in der Ebene / Divergenzsatz Sei $K = (P, Q)$ ein Strömungsfeld auf dem Gebiet $\omega \subset \mathbb{R}^2$ und $B \subset \omega$ ein Bereich mit Randzyklus ∂B. Dann gilt:

$$\int_{\partial B} K \cdot n \cdot |dx| = \int_B \operatorname{div} K\, dx, \qquad n : \text{Normalenvektor}$$

Das Intgral rechts kann als die Gesamtproduktionsrate auf B betrachtet werden.
Flussintegral im 2D direkt berechnen: $\int_{\partial B} K \cdot n \cdot d\sigma = \int_{t_0}^{t_1} K(\gamma(t)) \cdot n \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt$.

Vektorielles Flächenintegral Sei $\mathbb{R}^2 \supset B \xrightarrow{\varphi} F \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^1-Funktion und K ein stetiges Vektorfeld auf F. Dann ist das vektorielle Flächenintegral definiert als:

$$\int_F K(z) \cdot n \cdot d\mu_2(z) := \int_B K(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} \cdot |\varphi_u \times \varphi_v| du\, dv$$

bzw., zusammengefasst:

$$\int_F K \cdot d\omega := \int_B K(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) du\, dv$$

Dabei ist $\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$ der Normalenvektor n und $(\varphi_u \times \varphi_v) du\, dv$ das vektorielle Flächenelement.

Bedeutung: Fluss von K durch F in Richtung von n. n heisst *Orientierung* von F. Flächenintegral ist von φ unabhängig, aber von der Orientierung hängt es ab.
▶ Wir orientieren F stets so, dass n von B aus gesehen *nach aussen* zeigt.

Satz von Gauss im $\mathbb{R}^3$ Für K ein C^1-Vektorfeld auf B gilt:

$$\int_{\partial B} K \cdot n \cdot |d\omega| = \int_B \operatorname{div} K \, d\mu$$

Im $\mathbb{R}^1$ führt das auf den Hauptsatz der Integralrechnung!
Vorsicht: Gauss unter Umständen nicht auf Gebiet anwendbar, in welchem K eine Singularität hat!
Interpretation: Die pro Zeiteinheit aus B herauskommende Flüssigkeitsmenge wird im Inneren von B mit örtlich variabler Intensität $\operatorname{div} K$ produziert und ist somit gleich dem Integral dieser Intensität über B.

6.3 Satz von Stokes

Das Integral eines Vektorfeldes K über einer *geschlossenen Kurve*, dem Rand ∂B des Bereichs B misst die Zirkulation von K längs ∂B. Vergleiche auch Satz von Green.

Satz von Stokes Für jede kompakte orientierte Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ und jedes C^1-Vektorfeld K auf F gilt:

$$\int_{\partial F} K \cdot dx = \int_F \operatorname{rot} K \cdot d\omega$$

Die Zirkulation Z von K längs ∂F ist gleich dem Fluss von $\operatorname{rot} K$ durch die (orientierte) Fläche F.
Dieser Satz ist sehr ähnlich wie jener von Green, sozusagen „Green im 3d“.

6.4 Eigenschaften von Vektorefeldern

Lokale Eigenschaften (Skalarfeld) $\xrightarrow{grad}$ (Vektorfeld) $\xrightarrow{rot}$ (Vektorfeld) $\xrightarrow{div}$ (Skalarfeld)
▶ $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ ▶ $\operatorname{div} \operatorname{rot} K = 0$
▶ $\operatorname{grad} f = 0 \Leftrightarrow f$ lokal konstant
▶ $\operatorname{rot} K = 0 \Leftrightarrow K$ zirkulationsfrei $\Leftrightarrow$ lokal $\exists f$ mit $\operatorname{grad} f = K$
▶ $\operatorname{div} K = 0 \Leftrightarrow K$ divergenzfrei $\Leftrightarrow$ lokal $\exists L$ mit $\operatorname{rot} L = K$
▶ $\Delta f = 0 \Leftrightarrow f$ harmonisch

Globale Eigenschaften Die folgenden Eigenschaften eines Vektorfeldes K sind *äquivalent:*
▶ K besitzt ein Potential, das heisst, ein Skalarfeld f mit $\operatorname{grad} f = K$.
▶ Das Integral von K über jeden Weg hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab.
▶ Das Integral von K über jeden geschlossenen Weg ist Null.
▶ K heisst konservativ.

Trigonometrie

$\cos x = \frac{e^{\imath x}+e^{-\imath x}}{2}$ $\qquad$ $\sin x = \frac{e^{\imath x}-e^{-\imath x}}{2\imath}$

$\tan x = \frac{e^{\imath x}-e^{-\imath x}}{e^{\imath x}+e^{-\imath x}} \cdot \frac{1}{\imath}$

$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$\tanh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

$\operatorname{arcosh} y = \log(y + \sqrt{y^2-1})$

$\operatorname{arsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ $\qquad$ $\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$

Identitäten:

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ $\qquad$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ $\qquad$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$ $\qquad$ $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Werte:

α	$0°$ (0)	$30°$ $(\frac{\pi}{6})$	$45°$ $(\frac{\pi}{4})$	$60°$ $(\frac{\pi}{3})$	$90°$ $(\frac{\pi}{2})$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\cot\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Ableitungen

$(c)' = 0$ $\qquad$ $(cx)' = c$, ckonstant

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $(x^s)' = sx^{s-1},\ s \in \mathbb{R}$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $(\log_a|x|)' = (\log_a e)\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$

$(e^x)' = e^x$ $\qquad$ $(a^x)' = (\ln a)a^x$

$(e^{cx})' = ce^{cx}$ $\qquad$ $(a^{cx})' = (c\ln a)a^{cx}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)' = \cosh x$ $\qquad$ $(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $\qquad$ $(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Unbestimmte Integrale

Integrationskonstanten nicht vergessen!!!

Rational:

$\int 0dx = const.$ $\qquad$ $\int kdx = k \cdot x$

$\int x^s dx = \frac{1}{s+s}x^{s+1}, \quad s \neq -1$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|, \quad x \neq 0$

$\int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a(s+1)}(ax+b)^{s+1}, \quad s \neq -1$

$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$

$\int (ax^p+b)^s x^{p-1}dx = \frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap(s+1)}, \quad s \neq -1,\ ap \neq 0$

$\int (ax^p+b)^{-1}x^{p-1}dx = \frac{1}{ap}\ln|ax^p+b|, \quad ap \neq 0$

$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln|cx+d|$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{\ln(x^2+a^2)}{2}$

$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx = \frac{\ln|x^2-a^2|}{2}$

$\int \frac{x}{a+x}dx = x - a\ln|x+a|$

$\int \frac{x}{x-a}dx = x + a\ln|x-a|$

$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \operatorname{artanh} x,\ x \in (-1,1)$

$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \operatorname{artanh}\frac{1}{x},\ x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|,\ x \in (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

Wurzeln:

$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$

$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x,\ x \in (-1,1)$

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x,\ x \in (-1,1)$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{arsinh} x$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh} x,\ x \in (1,\infty)$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{|a|}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2}$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2}$ $\qquad$ $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}$

Exponential/Logarithmus:

$\int e^{cx}dx = \frac{1}{c}e^{cx}$

$\int a^{cx}dx = \frac{1}{c\cdot\ln a}a^{cx}$

$\int e^{ax}p(x)dx = e^{ax}\left[a^{-1}p(x) - a^{-2}p'(x) \pm \cdots + (-1)^n a^{-n-1}p^{(n)}(x)\right]$,

$a \neq 0$, $p(x)$: Polynom n-ten Grades

$\int e^{cx}\sin(ax+b)dx = \frac{e^{cx}}{a^2+c^2}\left[c\sin(ax+b) - a\cos(ax+b)\right]$

$\int e^{cx}\cos(ax+b)dx = \frac{e^{cx}}{a^2+c^2}\left[c\cos(ax+b) + a\sin(ax+b)\right]$

$\int \ln|x|dx = x(\ln|x|-1)$

$\int \frac{\ln|x|}{x}dx = \frac{(ln|x|)^2}{2}$

$\int \ln|\frac{1}{x}|dx = (\ln|\frac{1}{x}|+1)\cdot x$

$\int x^s\ln x\ dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\left(\ln x - \frac{1}{s+1}\right), \quad s \neq -1,\ x > 0$

$\int \log_a|x|dx = x(\log_a|x| - log_a e)$

$\int x^{-1}\ln x\ dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2, \quad x > 0$

$\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \log|f(t)| + const.$

Trigonometrie:

$\int \sin x\ dx = -\cos x$ $\qquad$ $\int \cos x \sin x dx = \frac{-\cos^2 x}{2}$

$\int \cos x\ dx = \sin x$ $\qquad$ $\int \cos(ax)\sin(ax)dx = \frac{-\cos^2(ax)}{2a}$

$\int \tan x\ dx = -\ln|\cos x|$ $\qquad$ $\int \cot x\ dx = \ln|sinx|$

$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$
$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$
$\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)$
$\int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)$
$\int \sin^n x\ dx = S_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\cdot S_{n-2},$
$n \geq 2,\ \text{mit}\ S_0 = x,\ S_1 = -\cos x$
$\int \cos^n x\ dx = C_n = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\cdot C_{n-2},$
$n \geq 2,\ \text{mit}\ C_0 = x,\ C_1 = \sin x$
$\int \tan^2 x\ dx = \tan x - x$
$\int \cot^2 x\ dx = -\cot x - x$
$\int \arcsin x\ dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\int \arcsin\frac{1}{x}dx = \arcsin\frac{1}{x} - \ln(\sqrt{x^2-1}-|x|)$
$\int \arccos x\ dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\int \arccos\frac{1}{x}dx = \ln(\sqrt{x^2-1}-|x|) + \arccos\frac{1}{x}\cdot x$
$\int \arctan x\ dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\int \arctan\frac{1}{x}dx = \frac{\ln(x^2+1)}{2} + \frac{\pi\cdot|x|}{2} - x\arctan x$
$\int \text{arccot}x\ dx = x\text{arccot}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\int \sinh x\ dx = \cosh x\ dx$
$\int \cosh x\ dx = \sinh x$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \tanh x$
$\int \tanh x\ dx = \ln(\cosh x)$
$\int \coth x\ dx = \ln|\sinh x|$
$\int \text{arsinh}x\ dx = x\text{arsinh}x - \sqrt{x^2+1}$
$\int \text{arcosh}x\ dx = x\text{arcosh}x - \sqrt{x^2-1}$
$\int \text{artanh}x\ dx = x\text{artanh}x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$
$\int \text{arcoth}x\ dx = x\text{arcoth}x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$

Bestimmte Integrale

$\int_0^{2\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = \int_0^{2\pi}\sin(mx)\sin(nx)dx$
$= \begin{cases} 0, & \text{wenn } m \neq n \\ \pi, & \text{wenn } m = n \neq 0, \end{cases} \quad m,n \in Z$
$\int_0^{2\pi}\sin(mx)\cos(nx)dx = 0$
$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2},\ a > 0$
$\int_0^{\infty}\cos(x^2)dx = \int_0^{\infty}\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\int_0^{\infty}e^{-ax}x^n dx = n!a^{-n-1},\ a > 0$
$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0$
$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}x^{2n}dx$
$= \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi a^{-2n-1}},\ a > 0,\ n \in N\cup 0$
$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a\omega^2+b\omega+c)}d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}$
$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$

Wichtige Grenzwerte

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x\to\infty}(x^m e^{-ax}) = 0,\ a > 0$
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0}(x^a\ln x) = 0,\ a > 0$
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
$\lim_{x\to\infty}(x^{-a}\ln x) = 0,\ a > 0$
$\lim_{x\to 0-}e^{\frac{-1}{x}} = \infty$
$\lim_{x\to 0+}e^{\frac{-1}{x}} = 0$
$\lim_{x\to\infty}e^{t(u+\imath v)} = 0 \text{ falls } \text{Re}(u+\imath v) < 0$

Reihenentwicklungen

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
$\text{artanh}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n+1}x^{n+1}$
für $-1 < x \leq 1$
$\log\frac{x+1}{x-1} = 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)x^{2k+1}}$
für $|x| > 1$
$\log\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots) = 2\sum_{n0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$
für $|x| < 1$

Geometrie

Gerader Kreiskegel: $S = \pi r(r+s)$, $V = \frac{\pi}{3}r^2h$, s: Seitenlinie
Kugel: $V = \frac{4\pi}{3}r^3$, $S = 4\pi r^2$
Torus: $V = 2\pi^2 ar^2$, $S = 4\pi^2 ar$, r: kl.Radius, a: gr. Radius
Kreisgleichung: $(x-m_1)^2 + (y-m_2)^2 = r^2$
Punkt-Steigungs-Gl.: $y - y_P = m(x - x_P)$
Zwei-Punkte-Gl.: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$

Index