Felder und Komponenten I

Formelsammlung

Jonas Huber

Rev. 10 bis 50, 19.4.2009

1 Elektrostatik

1.1 Coulomb-Gesetz

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r^2} \vec{e}_{ji} \tag{1.1}$$

1.2 Elektrisches Feld

Zu N Punktladungen Q_j an den Orten $\vec{r}_j$ gehört das elektrische Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j \cdot (\vec{r} - \vec{r}'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3} \tag{1.2}$$

Zur kontinuierlichen Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}')$ gehört das elektrische Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{V'} \frac{\varrho(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, dV' \tag{1.3}$$

1.3 Satz von Gauss

Für die Raumladungsdichte ϱ und die geschlossenen Fläche ∂V, die als Berandung des Volumens V aufgefasst werden kann, lautet der Satz von Gauss in der Elektrostatik:

$$\Psi_{\partial V} = \oint\limits_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{V} \varrho \, dV \tag{1.4}$$

Und für eine Punktladung Q (bzw. Summe von Punktladungen) im Inneren jeder geschlossenen Fläche lässt sich dies schreiben als:

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.5}$$

1.4 Energie und Potential

1.4.1 Arbeit

Betrachtet wird die Punktladung Q_0, welche sich auf einem Weg Γ von $\vec{r}_e$ nach $\vec{r}_a$ in einem von einer oder mehreren anderen Punktladungen erzeugten elektrischen Feld $\vec{E}$ bewegt werde. Die dazu nötige Arbeit ist gegeben als:

$$W_{\vec{r}_a}(\vec{r}_e) = -Q_0 \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_e} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{dl} \tag{1.6}$$

1.4.2 Elektrostatisches Potential

Das elektrische Potential ist wie folgt definiert:

$$\varphi_{\vec{r}_a}(\vec{r}) := \frac{W_{\vec{r}_a}(\vec{r})}{q} \tag{1.7}$$

$W_{\vec{r}_a}$ ist die Arbeit, welche geleistet werden müsste, um die Probeladung q vom Ort $\vec{r}_a$, dem Bezugspunkt mit $\varphi_{\vec{r}_a}(\vec{r}_a) = 0$, zum Ort $\vec{r}$ zu bringen.

Verlegt man den Bezugspunkt $\vec{r}_a$ ins Unendliche, kann man das Potential, das zu N Punktladungen Q_j oder zu einer Ladungsdichte ϱ gehört, direkt berechnen:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \tag{1.8}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{1.9}$$

Das Potential kann auch mit einem Wegintegral über das E-Feld berechnet werden, wobei dann zwischen diesem Integral und dem Potential an den Enden des Weges folgender Zusammenhang gilt:

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \varphi(\vec{r}_a) - \varphi(\vec{r}) \tag{1.10}$$

Wählt man die Normierung im Anfangspunkt, ist also $\varphi(\vec{r}_a) = 0$, vereinfacht sich dies zu:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl} \tag{1.11}$$

Weiter gilt für alle geschlossenen Wege:

$$\oint_{\Gamma_\circ} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \tag{1.12}$$

1.5 Kapazität

1.5.1 Spannung

Die Spannung U ist definiert als Potentialdifferenz:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta\varphi =: U \tag{1.13}$$

1.5.2 Kapazität

Wird in einem System von zwei Elektroden (z. B. Plattenkondensator) die Ladungsmenge Q von der einen Elektrode auf die andere verschoben, gelten für die Spannung zwischen den Elektroden und die im System gespeicherte Energeie:

$$Q = C \cdot U \tag{1.14}$$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \tag{1.15}$$

1.6 Materialeinfluss

1.6.1 Dipoldichte bzw. Polarisation

Die Polarisation $\vec{P}$ beschreibt die polarisierte Materie in kontinuierlicher Weise und ist definiert als:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_j \vec{p}_j \qquad (\vec{p}_j \text{ in } \Delta V) \tag{1.16}$$

Dabei ist $\vec{p}_j$ das Dipolmoment des j-ten Teilchens.

Eine allgemeine dreidimensionale Polarisation $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)^T$ kann als Superposition dreier jeweils in eine Koordinatenrichung zeigenden Polarisationen betrachtet werden, was auf die *gebundene* Raumladungsdichte

$$\varrho_{\text{geb}}(\vec{r}) = -\text{div}\, \vec{P} \tag{1.17}$$

führt. Das zugehörige Feld kann mit dem Coulomb-Integral (1.3) berechnet werden. Um auch mit sprunhaften Änderungen von $\vec{P}$ umgehen zu können, kann obiger Zusammenhang auch in Intgralform geschrieben werden:

$$-\oint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \varrho_{\text{geb}} \, dV \tag{1.18}$$

1.6.2 Elektrische Suszeptibilität

Ein äusseres $\vec{E}$-Feld beeinflusst die Polarisation. Als (meistens gute) Näherung, aber nicht allgemeingültiger Zusammenhang, kann man eine Proportionalität

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_0 \vec{E} \tag{1.19}$$

verwenden, wobei die Materialkonstante χ_0 als *elektrische Suszeptibilität* bezeichnet wird. Dies geht bei *isotropem* Material, bei welchem die Stärke der Polarisation nicht von der Richtung des äusseren $\vec{E}$-Feldes abhängt.

1.6.3 Dielektrisches Verschiebungsfeld

Man definiert das nur durch die gegebene Ladungsverteilung ϱ_{frei} und lässt es der Formel

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \varrho_{\text{frei}} \, dV \tag{1.20}$$

gehorchen.

Im Vakuum ergibt sich für das dielektrische Verschiebungsfeld $\vec{D}$ also:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \tag{1.21}$$

Wenn zusätzlich Material vorhanden ist gilt $\varrho_{\text{total}} = \varrho_{\text{frei}} + \varrho_{\text{geb}}$ und es folgt:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{1.22}$$

Betrachtet man schliesslich den Spezialfall aus (1.19) folgt:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \tag{1.23}$$

Dabei ist $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ die *relative Dielektrizitätskonstante* und $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ heisst *Permittivität*.

1.6.4 Homogen linear isotropes Material

Isotropes Material, welches zusätzlich linear ist und vor allem im gesamten Feldgebiet durch eine einzige Materialkonstante ε_r (bzw. χ_e) beschrieben werden kann. Dann kann das Feld bzw. das Potential einer gegebenen Raumladungsverteilung $\varrho(\vec{r}')$ sehr ähnlich wie im Vakuum berechnet werden:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint\limits_{V'} \frac{\varrho(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \tag{1.24}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint\limits_{V'} \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{1.25}$$

2 Das Verhalten des Gleichstroms

2.1 Feld der elektrischen Stromdichte

Der Stromdichtevektor $\vec{J}$ zeigt in jedem Punkt eines Leiters in die Fliessrichtung der (positiven) Ladungen und sein Betrag gibt an, wie viel Ladung pro Fläche pro Zeit fliesst.

Betrachtet man eine geschlossen Hüllfläche $F = \partial V$, ergibt sich sofort

$$\oint\limits_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{F} = 0 \tag{2.1}$$

denn sonst würde sich die Ladung in V mit der Zeit ändern, was aber im betrachteten Falle von zeitlich konstanten Grössen, insbesondere dem E-Feld, nicht sein kann.

Weiter findet man zwei wichtige Tatsachen:

- Die Stromdichte ist auf der Leiteroberfläche immer tangential zur Grenze zum umliegenden Isolator.
- An der Grenze zwischen zwei verschiedenen Leitern kann die Normalkomponente der Stromdichte nicht springen.

2.1.1 Das Ohm'sche Gesetz

Das Ohm'sche Gesetz lautet für alle metallischen Leiter und eine Reihe von weiteren Stoffen:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{2.2}$$

Dabei bezeichnet σ die Leitfähigkeit des betrachteten Materials.

Falls die Leitfähigkeit entlang des geschlossenen Integrationsweges $\Gamma_\circ$ konstant ist:

$$\oint_{\Gamma_\circ} \vec{J} \cdot \vec{dl} = 0 \tag{2.3}$$

2.2 Wärmewirkung des elektrischen Stromes

$$\Delta W_W = UI\Delta t \tag{2.4}$$

2.2.1 Feld der Leistungsdichte

Die Leistungsdichte ist ein Skalarfeld und gibt für jeden Punkt in einem Leiter an, wie viel elektrische Energie pro Zeit und Volumen in eine andere Energieform umgewandelt wird:

$$p_j = \frac{\Delta W}{V\Delta t} = \vec{E} \cdot \vec{J} \tag{2.5}$$

Wenn speziell das Ohm'sche Gesetz gilt, ist p_j in der Regel eine Wärme- bzw. Heizleistung und die Gleichung vereinfacht sich zu:

$$p_j = \frac{1}{\sigma}|\vec{J}|^2 = \sigma|\vec{E}|^2 \tag{2.6}$$

2.3 Elektrischer Widerstand

Um die bekannte Darstellung des elektrischen Widerstandes, $R = U/I$ zu präzisieren, kann man ihn wie folgt definieren:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{I^2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV \tag{2.7}$$

Diese allgemeine Definition ordnet dem Leitervolumen die Grösse R zu.

3 Magnetostatik

3.1 Magnetische Pole als Materialeigenschaft

3.1.1 Magnetische Induktion B und Magentisierung M

Man definiert ein *magnetisches Dipolmoment* $\vec{m} = p\vec{d}$, wobei p die magnetische Monopolstärke ist und nichts mit dem elektrischen Dipolmoment $\vec{p}$ zu tun hat. Dann kann die magnetische Dipoldichte oder die *Magnetisierung* $\vec{M}$ eingeführt werden:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_j \vec{m}_j \qquad (\vec{m}_j \text{ in } V) \tag{3.1}$$

Falls die Magnetisierung nicht homogen ist, gehört eine gebundene magnetische Ladungsdichte dazu:

$$\varrho_m = -\mu_0 \operatorname{div} \vec{M} \tag{3.2}$$

Nun kann man ein weiteres Feld, die magnetische Induktion oder *magnetische Flussdichte* $\vec{B}$ eingeführt werden, welche für ein beliebiges Volumen V mit Berandung ∂V folgenden Beziehungen gehorcht:

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0 \tag{3.3}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \tag{3.4}$$

$\vec{B}$ hat die Einheit Tesla. Die erste der beiden obigen Gleichungen enthält die Nichtexistenz magnetischer Monopole.

3.1.2 Zusammenhang zwischen H und M

Während in Permanentmagneten die Magnetisierung konstant ist oder mindestens einen konstanten Anteil besitzt, also etwa von der Form $\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_v(\vec{H})$ ist, hängt bei weichmagnetischen Stoffen wie Eisen die Magnetisierung nur vom äusseren Magnetfeld $\vec{H}$ ab, unter Umständen auch von dessen bisherigem zeitlichen Verlauf.

Bei Eisen und für kleine Feldstärken gilt näherungsweise eine Proportionalität:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{3.5}$$

Dabei bezeichnet χ_m die *magnetische Suszeptibilität.*

Setzt man dies in (3.4) ein, ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H} \tag{3.6}$$

μ_r ist die relative Permeabilität des Medimus und $\mu = \mu_0\mu_r$ ist die Permeabilität des Mediums.

3.2 Magnetische Wirkung des elektrischen Stromes

Ein Strom, der in einem geraden Draht fliesst, erzeugt ein Magnetfeld $\vec{H}$, welches immer tangential an einen Kreis um die Stromachse gerichtet ist. Dies lässt sich durch das Vektorprodukt zwischen Stromrichtung und der radialen Richtung erreichen, nämlich $\vec{H} \sim \vec{e}_I \times \vec{e}_\rho$.

3.2.1 Gesetz von Biot-Savart

Mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart kann das durch eine Stromschleife S erzeugte Magnetfeld berechnet werden:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_S \frac{d\vec{F} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{3.7}$$

Dabei ist S eine Stromschleife und obiges Integral erstreckt sich über die gesamte Schleife.

Hat man nicht nur eine linienförmige Stromschleife, sondern eine dicke Stromverteilung $\vec{J}$, so gilt:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \tag{3.8}$$

Auch dieses Integral gilt nur als Ganzes, wenn $\vec{J}$ eine statische und daher geschlossene Stromverteilung ist.

3.2.2 Durchflutungsgesetz

Für einen linienförmigen Strom in einer Leiterschleife Γ gilt:

$$I = \oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} \tag{3.9}$$

In allgemeiner Form für die aus geraden Anteilen bestehende dicke Stromverteilung $\vec{J}$ gilt:

$$\oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{F} \tag{3.10}$$

3.3 Äquivalenz von Magnet und Strom

3.3.1 Kraftwirkung zwischen Strömen

Wie zwischen zwei Magneten kann auch zwischen zwei stromführenden Drähten eine Kraftwirkung stattfinden, welche je nach Stromrichtung (gleich bzw. entgegengesetzt) anziehend oder abstossend sein kann. Für zwei parallele Drähte der Länge l im Abstand d, welche von den Strömen I_i bzw. I_j durchflossen sind, gilt

$$\vec{F}_i = \frac{\mu_0 l I_i I_j}{2\pi d} \vec{e}_{ij} \tag{3.11}$$

wobei $\vec{e}_{ij}$ der senkrecht vom i-ten zum j-ten Draht weisende Einheitsvektor ist.

3.4 Der magnetische Kreis

Betrachtet man lineares Material und das Magnetfeld nur in einem stromfreien Bereich, so kann folgende Gegenüberstellung gemach werden:

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{F} = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0 \tag{3.12}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \tag{3.13}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{3.14}$$

Daran sieht man, dass die elektrischen Grössen $\vec{J}$, $\vec{E}$ und σ formal die gleiche Rolle spielen wie die magnetischen Grössen $\vec{B}$, $\vec{H}$ und μ.

3.4.1 Der magnetische Widerstand

Um die Analogie komplett zu machen, definiert man im Magnetfeld den Grössen I, U und R entsprechende Begriffe:

$$I = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{F} \qquad \longleftrightarrow \qquad \Phi = \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} \tag{3.15}$$

$$U = \int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \longleftrightarrow \qquad \Theta = \int_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} \tag{3.16}$$

$$R = \frac{U}{I} \qquad \longleftrightarrow \qquad R_M = \Theta / \Phi \tag{3.17}$$

Dabei bezeichnet Φ den *magnetischen Fluss*, Θ die *magnetische Spannung* und R_M den *magnetischen Widerstand*.

4 Wirkung zeitvariabler Magnetfelder

4.1 Elektromagnetische Induktion

4.1.1 Elektromotorische Kraft

In einer Quelle gibt es antreibende Kräfte nichtelektrischer Natur, die den Stromfluss in Gang halten. Diese Kräfte können durch eine äquivalente elektrische Feldstärkeverteilung $\vec{E}_{ne}$ dargestellt werden. $\vec{E}_{ne}$ gehorcht *nicht* den geleichen Gesetze wie das normale elektrostatische Feld.

Integriert man die Feldstärke $\vec{E}_{ne}$ entlang des orientierten Weges $\vec{\Gamma}$, erhält man eine Grösse der Dimension Spannung, welche man als *elektromotorische Kraft* oder kurz *EMK* bezeichnet:

$$EMK = \int_{\Gamma} \vec{E}_{ne} \cdot \vec{dl} \tag{4.1}$$

Unabhängig davon, wie die EMK in der Quelle genau entsteht, ist die an den Klemmen messbare Spannung U immer der EMK entgegengesetzt.

4.1.2 Induktionsgesetzt

Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife bewirkt einen elektrischen Strom in dieser Schleife, sie verursacht eine EMK:

$$EMK = -\frac{d}{dt}\iint_{F} \vec{B} \cdot d\vec{F} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{4.2}$$

Billigt man dem $\vec{E}$-Feld zwei grundsätzlich verschiedene Ursachen zu, nämlich zum einen Ladungen und zum anderen zeitliche Änderungen von $\vec{B}$, erhält man das allgemeine Induktionsgesetz, welches die zweite Ursache für elektrische Felder beschreibt.

$$\oint_{\partial F} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_{F} \vec{B} \cdot d\vec{F} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{4.3}$$

Beachte, dass dies nicht der Gleichung $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$ aus der Statik widerspricht, wenn man für den statischen Fall die Konstanz aller beteiligter Grössen, speziell auch von $\vec{B}$ fordert.

Beachte weiter, dass wenn es sich um eine Spule handelt, ein Faktor N für die Anzahl der Windungen hinzukommt.

4.1.3 Selbstinduktion

Jede stromführende Leiterschleife umfasst den von ihr selbst erzeugten magnetischen Fluss Φ. Da jede Änderung des Schleifenstromes auch eine Änderung von Φ nach sich zieht, welche ihrerseits eine EMK bewirkt, entsteht in der Schleife ein weiterer Strom, I_{ind}, welcher nach der Lenz'schen Regel dem ursprünlichen Strom entgegengerichtet ist.

4.2 Induktivität

Die Induktivität L ist wie folgt definiert:

$$L := \frac{1}{I}\iint_{F} \vec{B} \cdot d\vec{F} \tag{4.4}$$

Setzt man wie beschrieben $U = -EMK$ gilt:

$$U(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI}{dt} \tag{4.5}$$

4.2.1 Gegeninduktivität

Der $\vec{B}$-Fluss muss nicht nur zum Strom in der gleichen Schleife gehören, er kann auch von einer anderen Stromverteilung herrühren, d. h. die Stromänderung in einer ersten Schleife induziert eine Spannung in einer zweiten Schleife, wenn der Fluss der ersten acuh von der zweiten Schleife (teilweise) umfasst wird.

Man betrachtet zwei Stromschleifen mit den Strömen I_i, I_j mit den zugehörigen Magnetfeldern $\vec{B}_i$ und $\vec{B}_j$. Weiter seien F_i und F_j die von den jeweiligen Schleifen berandeten Flächen. Dann sind die Gegeninduktivitäten definiert als:

$$M_{ij} := \frac{1}{I_j} \iint\limits_{F_i} \vec{B}_j \cdot d\vec{F} \qquad M_{ji} := \frac{1}{I_i} \iint\limits_{F_j} \vec{B}_i \cdot dF \tag{4.6}$$

Berücksichtigt man auch die im allgemeinen verschiedenen Selbstinduktivitäten der Schleifen, L_i und L_j, ergibt sich für die induzierten Spannungen:

$$U_i = L_i \frac{dI_i}{dt} + M_{ij} \frac{dI_j}{dt} \qquad U_j = L_j \frac{I_j}{dt} + M_{ji} \frac{dI_i}{dt} \tag{4.7}$$

Unter recht allgemeinen Bedinungen sind die Gegeninduktivitäten aus beiden Richtungen gleich: $M_{ij} = M_{ji}$.

4.2.2 Induktivität als Energiespeicher

Im magnetischen Feld einer Induktivität, die vom Strom I (Momentanwert) durchflossen wird, ist die Energie

$$W_L = \frac{1}{2} L I^2 \tag{4.8}$$

gespeichert.

5 Maxwell-Gleichungen

5.1 Grundgrössen

Im Mittelpunkt stehen folgende, bereits bekannte Grundgrössen:
$\vec{E}$: Elektrische Feldstärke (V/m)
$\vec{D}$: Dielektrische Verschiebungsdichte (As/m²)
$\vec{B}$: Magnetische Induktion (T)
$\vec{H}$: Magnetische Felstärke (Am)
$\vec{J}$: Elektrische Stromdiche (A/m²)
ϱ: Elektrische Ladungsdichte (As/m³)
Weiter werden gelegentlich folgende weniger wichtige Grössen verwendet:
ϕ: elektrisches Skalarpotential (V)

$\vec{P}$: elektrische Polarisation
$\vec{M}$: Magnetisierung

5.2 Integralform

$$\oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} \tag{5.1}$$

$$\oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{F} + \frac{d}{dt} \iint_F \vec{D} \cdot d\vec{F} \tag{5.2}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \varrho \, dV \tag{5.3}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0 \tag{5.4}$$

Der letzte Term auf der rechten Seite von (5.2) bezeichnet man als *Verschiebungsstrom*. Dieser wird jedoch nur relevant, wenn die zeitlichen Änderungen sehr gross werden.

5.3 Differentialform

Von den Maxwell-Gleichungen in Integralform gelangt man durch den Übergang zu infinitesimal kleinen Flächen F bzw. Volumen V zur Differentialform:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \tag{5.5}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) \tag{5.6}$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, t) \tag{5.7}$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \tag{5.8}$$

Beachte, dass dies räumlich und zeitlich *lokale* Beziehungen sind, d. h. die Gleichungen setzen die Feldgrössen und deren Ableitungen am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t zueinander in Beziehung.

6 Maxwell-Gleichungen lösen

6.1 Unmittelbarer Gehalt der Maxwell-Gleichungen

6.1.1 Direkte Aussage der Maxwell-Gleichungen

Die vier Maxwell-Gleichungen in Integralform stehen für folgende vier Aussagen:

1. Die in eine geschlossene Schleife ∂F induzierte elektrische Spannung (EMK) wir verursacht durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flulsses durch eine beliebige, von ∂F berandete Fläche F.

2. Die in eine geschlossene Schleife ∂F induzierte magnetische Spannung wird verursacht durch den elekrischen Strom I, der durch eine beliebige, von ∂F berandete Fläche F fliesst. Der Strom I setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, nämlich (a) aus der durch $\vec{J}$ beschriebenen bewegten Ladung und (b) dem Verschiebungsstrom, welcher der zeitlichen Änderung des dielektrischen Verschiebungsflusses durch die Fläche F entspricht.

3. Der Fluss der dielektrischen Verschiebung aus einem Volumen V heraus ist gleich der gesamten in V enthaltenen Ladung oder: $\vec{D}$-Linien enden auf Ladungen.

4. Der magnetische Fluss durch jede geschlossenee Fläche $F = \partial V$ verschwindet oder: die $\vec{B}$-Linien enden nirgends, sind also geschlossen.

Die Differentialform der Maxwell-Gleichungen ermöglicht nur eine weniger aussagende und naturgemäss nur *lokal* gültige Interpretation:

1. Die zeitliche Veränderung des $\vec{B}$-Feldes verursacht eine Verwirbelung des $\vec{E}$-Feldes.

2. Die zeitliche Veränderung des $\vec{D}$-Feldes sowie das $\vec{J}$-Feld verursachen zusammen eine Verwirbelung des $\vec{H}$-Feldes.

3. Das ϱ-Feld bildet die Quellen des $\vec{D}$-Feldes.

4. Das $\vec{B}$-Feld hat keine Quellen (Nichtexistenz magnetischer Ladungen).

6.1.2 Implizite Aussagen der Maxwell-Gleichungen

- Die letzte Maxwell-Gleichung ($\operatorname{div} \vec{B} = 0$) ist beinahe eine Folge der Ersten ($\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$), d. h. $\vec{B}$ kann höchstens eine konstante Divergenz besitzen. Diese letzte Maxwell-Gleichung ist also vor allem in der Statik wichtig und ist in zeitlich veränderlichen Situationen von untergeordneter Bedeutung; sie kann insebesondere beim stationären Zustand (reine Sinusgrössen aller Felder) weggelassen werden.

- Die Ladungserhaltung ist in den Maxwell-Gleichungen enthalten:

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \tag{6.1}$$

  Die Integralform der Ladungserhaltung ist bereits früher aufgetaucht.

6.2 Materialgleichungen

Die Maxwellgleichungen beeinhalten auch die zusätzlich eingeführten Grössen $\vec{D}$ und $\vec{B}$, was eine übersichtlichere Schreibweise ermöglicht. Auf der anderen Seite wird so vertuscht, dass *alle* vier Gleichungen miteinander verkoppelt sind, und nicht nur je zwei.

Die Beziehungen zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$ bzw. $\vec{B}$ und $\vec{H}$ wurden bereits oben angesprochen ($\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ und $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$). Die Bestimmung von $\vec{P}$ undn $\vec{D}$ ist nicht trivial.

Daher beschränken wir uns auf den Spezialfall einfacher Proportionalitäten. Dann gilt im Vakuum

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0\vec{H} \tag{6.2}$$

und im Material entsprechend:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \text{mit } \mu \neq \mu_0,\ \varepsilon > \varepsilon_0 \tag{6.3}$$

Wenn solche Bedingungen gelten, spricht man von *linear isotropem Material.* Die Polarisation (Magnetisierung) hängt nicht von der Richtung von $\vec{E}$ ($\vec{H}$) ab und μ, ε sind unabhängig vom Betrag der Feldstärken. Die Materialparameter dürfen allerdings sehr wohl vom Ort abhängen. Ist dies nicht der Fall, ist das Material zusätzlich *homogen.*

In vielen Materialien gilt zusätzlich das Ohm'sche Gesetz

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}, \tag{6.4}$$

wobei das Material bezüglich des Parameters σ ebenfalls homogen, linear und isotrop sein kann – oder auch nicht.

6.2.1 Einsetzen in die Maxwell-Gleichungen

Setzt man obige Materialgleichungen in die Maxwell-Gleichungen in Differentialform ein erhält man:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} \tag{6.5}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \tag{6.6}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = \varrho \tag{6.7}$$

$$\operatorname{div}(\mu\vec{H}) = 0 \tag{6.8}$$

Dieses System ist nun vollständig verkoppelt, enthält dafür weniger Feldgrössen.

6.3 Stückweise homogenes Material

Innerhalb eines homogenen Materialstücks ergeben sich beträchtliche Vereinfachungen in (6.5), da dann die Materialparameter vor den div-Operator gezogen werden dürfen. Auf den Materialgrenzen hingegen benötigt man Gleichungen, welche dir Maxwell-Gleichungen auf der Grenze ersetzen, weil dort die Differentiation aufgrund der Unstetigekeiten grosse Schwierigkeiten bereiten würde.

6.3.1 Flächenladungen und -ströme auf Grenzflächen

Auf Grenzflächen kann eine Flächenladungsdichte ς existieren, sofern Ladungen auf die Oberfläche gelangen können. Geschieht dies durch einen externen Prozess, z. B. Reibung, müssen diese Ladungen als fest vorgegeben betrachtet werden. Entsteht die Flächenladungsdichte anders, d.h. mindestens eines der an der Grenze beteiligten Materialien ist leitfähig, muss ς berechnet werden.

Bewegen sich die Ladungen in der Oberfläche, entspricht dies einer Flächenstromdichte $\vec{\alpha}$, welche aber nur in idealisierten Modellen, welche z. B. eine sogenannte Grenzfolie enthalten, vorkommen kann.

6.4 Grenzbedingungen

Die folgenden Stetigkeitsbedingungen ersezten die Maxwell-Gleichungen auf dem Rand bzw. der Grenze zwischen zwei Materialien.

6.4.1 Allgemeiner Fall ohne ideale Leiter und ohne Grenzfolien

$$\vec{E}_{i,T} - \vec{E}_{k,T} = \vec{0} \tag{6.9}$$

$$\vec{H}_{i,T} - \vec{H}_{k,T} = \vec{0} \tag{6.10}$$

$$D_{i,n} - D_{k,n} = \varsigma \tag{6.11}$$

$$J_{i,n} - J_{k,n} = -\frac{\partial\varsigma}{\partial t} \tag{6.12}$$

$$B_{i,n} - B_{k,n} = 0 \tag{6.13}$$

$$J_{i,n} + \frac{\partial}{\partial t} - \left(J_{k,n} + \frac{\partial}{\partial t} D_{k,n}\right) = 0 \tag{6.14}$$

Dabei ist die Normalkomponente (Index n) bezüglich $\vec{e}_n$, welcher von G_k nach G_i weist, angegeben. Der Index T steht für die Tangentialkomponente, welche als Vektor geschrieben wird, da innerhalt der Grenzfläch die Richtung in zwei Dimensionen frei ist.

(6.9, 6.10): notwendig; (6.11, 6.12): Bestimmungsgleichungen für ς; (6.13, 6.14): Folgen meist aus (6.9, 6.10); (6.14): Folgt aus (6.11, 6.12).

6.4.2 Grenze zum idealen Leiter

$$\vec{E}_{i,T} = \vec{0} \tag{6.15}$$
$$\vec{H}_{i,T} = \vec{\alpha} \times \vec{e}_n \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{e}_n \times \vec{H}_{i,T} \tag{6.16}$$
$$D_{i,n} = \varsigma \tag{6.17}$$
$$J_{i,n} = -\mathrm{div}_F \vec{\alpha} - \frac{\partial \varsigma}{\partial t} \tag{6.18}$$
$$B_{i,n} = 0 \tag{6.19}$$
$$J_{i,n} + \frac{\partial}{\partial t} D_{i,n} = -\mathrm{div}_F \vec{\alpha} \tag{6.20}$$

Hier weist $\vec{e}_n$ vom idealen Leiter ins i-te Feldgebiet.

(6.15): notwendig; (6.16–6.18): Bestimmungsgleichungen für ς und $\vec{\alpha}$; (6.19): Folgt meist aus (6.15); (6.20): Folgt meist aus (6.17, 6.18), Bestimmungsgleichung für $\mathrm{div}_F \vec{\alpha}$.

6.5 Entkopplung der Maxwell-Gleichungen

6.5.1 Der Laplace-Operator

Neben den verschwindenden Kombinationen $\operatorname{rot}\operatorname{grad}$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot}$ gibt es nocht die Möglichkeiten $\operatorname{div}\operatorname{grad}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ und $\operatorname{grad}\operatorname{div}$. Dies ergibt den Laplace-Operator:

$$\Delta s := \operatorname{div}\operatorname{grad} s \tag{6.21}$$
$$\Delta \vec{v} := \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{v} \tag{6.22}$$

Beachte, dass der Laplace-Operator unterschiedlich definiert ist, wenn er auf einen Vektor angewandt wird. Weiter ist Δs wieder ein Skalar und $\Delta \vec{v}$ wieder ein Vektor.

6.5.2 Die homogene Wellengleichung

Betrachtet man das quellenfreie Vakuum, d. h. $\vec{J}$ und ϱ verschwinden, $\vec{B}$ hängt mit $\vec{H}$ sowie $\vec{D}$ mit $\vec{E}$ über einfache Proportionalitäten zusammen, ergibt sich, wenn nur $\vec{E}$ und $\vec{H}$ benutzt werden:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \tag{6.23}$$
$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{6.24}$$
$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \tag{6.25}$$
$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{6.26}$$

Wendet man rot auf die erste und den Operator $-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}$ auf die zweite Gleichung an bzw. rot auf die zweite und $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}$ auf die erste, erhält man zwei sogenannte *vektorielle Wellengleichungen* für $\vec{E}$ und $\vec{H}$.

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \tag{6.27}$$

$$\Delta \vec{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} \tag{6.28}$$

Daraus lassen sich für alle Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ *skalare* Wellengleichungen der Form

$$\Delta E_x - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x = 0 \tag{6.29}$$

schreiben.

6.5.3 Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung

Die allgemeine, noch komplexe, Lösung der homogenen Wellengleichung kann mittels Separation der Variablen gefunden werden und hat die Form:

$$C\mathrm{e}^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = C\mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \tag{6.30}$$

Dabei wurden die Konstanten k_x, k_y und k_x zum sogenannten *Wellenvektor* zusammengefasst und die kartesischen Koordinaten zum Ortsvektor $\vec{r}$.

Hier sind jedoch nur reellwertige Lösungen interessant und daher hat eine Lösung f der homogenen Wellengleichung die Form:

$$f(\vec{r}, t) = \Re\left(C\mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) \tag{6.31}$$

Der Wellenvektor $\vec{k}$ und ω sind durch die Nebenbedingung

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 =: k_0^2 \tag{6.32}$$

miteinander verknüpft.

Man nimmt an, dass die Komponenten von $\vec{k}$ sowie ω und C seien reell und positiv. Dann hat $\vec{k}$ eine eindeutige Richtung, die Ausbreitungsrichtung der Welle, und man kann nun das Koordinatensystem so drehen, dass $\vec{k}$ in z-Richtung weist, also $\vec{k} = k_0 \vec{e}_z$. Dann gilt:

$$f(\vec{r}, t) = \Re\left(C\mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) = \Re\left(C\mathrm{e}^{j(\omega t - k_0 z)}\right) = C\cos(\omega t - k_0 z) \tag{6.33}$$

Nun haben wir eine Cosinuswelle, die sich mit Geschwindigkeit $v = \frac{\omega}{k_0}$ in positiver z-Richtung ausbreitet.

Eine solche Welle heisst *(skalar) ebene Welle*, da sich die Lösung nur in eine Richtung ändert.

6.5.4 Maxwell-Lösungen

Um aus obigen allgeminen Ausführungen auf Lösungen der Maxwell-Gleichungen schliessen zu können, muss deren interne Verkopplung wieder brücksichtigt werden.

Das elektromagnetische Feld

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \Re\left(\vec{E}_0 \mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \Re\left(\vec{H}_0 \mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) \tag{6.34}$$

mit den Bedingungen

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu_0}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right) \qquad \vec{E}_0\cdot\vec{k} = 0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{k} = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 = k_0^2. \tag{6.35}$$

genügt im Vakuum den Maxwell-Gleichungen und heisst *(linear polarisierte, harmonische) ebene Welle.* $\vec{k}$ beschreibt die Ausbreitungsrichtung der Welle, seine Komponenten werden Wellenzahlen in x-, y- und z-Richtung genannt. $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ heisst Wellenzahl des Vakuums.

Eine ebene Welle ist durch ω, $\vec{k}$ und die senkrecht auf $\vec{k}$ stehende vektorielle Amplitude des elektrischen Feldes $\vec{E}_0$ eindeutig bestimt.

Wellenimpedanz Die Wellenimpedanz des Vakuums ist wie folgt definiert:

$$Z_{w0} := \frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{H}_0|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{6.36}$$

6.6 Potentiale des elektromagnetischen Feldes

Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ können eindeutig aus dem *elektrischen Skalarpotential* ϕ bzw. aus dem *magnetischen Vektorpotential* $\vec{A}$ abgeleitet werden:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{6.37}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \tag{6.38}$$

Durch Einführung der Potentiale kann die Anzahl der unbekannten Funktionen in den Maxwell-Gleichungen reduziert werden.

Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_{V'} \frac{\vec{J}_0(\vec{r}',t')|_{t'=t-\sqrt{\mu\varepsilon}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \tag{6.39}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_{V'} \frac{\varrho_0(\vec{r}',t')|_{t'=t-\sqrt{\mu\varepsilon}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \tag{6.40}$$

Da die Wirkung der Quelle verzögert am Aufpunkt eintrifft, spricht man von *retardierten Potentialen.*

7 Maxwell-Gleichungen in Spezialfällen

7.1 Der stationäre Zustand

Im stationären Zustand hängen *alle* Feldgrössen sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω von der Zeit ab. Zur Darstellung verwendet man sogenannte zugeordnete komplexe Grösse, welche man als *Zeiger* oder *Phasoren* bezeichnet und die durch komplexe Zahlen dargestellt werden können. Wir kennzeichnen eine komplexe Zahl mit einer Unterstreichung als Zeiger, denn jeder Zeiger kann als komplexe Zahl dargestellt werden, jedoch ist nicht jede komplexe Zahl ein Zeiger (z. B. Impedanz).

7.1.1 Maxwell-Gleichungen im stationären Zustand

Die Darstellung der Feldgrössen durch Zeiger der Form $\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}$ ermöglicht es, die zeitlichen Ableitungen durch den Faktor $j\omega$ zu ersetzen und weiter, die Maxwell-Gleichungen nur wzischen den komplexen Amplituden der Feldgrössen zu schreiben. Man erhält das System:

$$\operatorname{rot}\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = -j\omega\underline{\vec{B}}(\vec{r}) \tag{7.1}$$

$$\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \underline{\vec{J}}(\vec{r}) + j\omega\underline{\vec{D}}(\vec{r}) \tag{7.2}$$

$$\operatorname{div}\underline{\vec{D}}(\vec{r}) = \underline{\varrho}(\vec{r}) \tag{7.3}$$

$$\operatorname{div}\underline{\vec{B}}(\vec{r}) = \underline{0} \tag{7.4}$$

Wir beschränken uns auf Material, bei welchem $\vec{D}$ und $\vec{E}$ stationär so zusammenhängen, dass für ihre komplexen Amplituden eine Beziehung der Form $\underline{\vec{D}} = \varepsilon\underline{\vec{E}}$ gilt. Analog: $\underline{\vec{B}} = \mu\underline{\vec{H}}$ und $\underline{\vec{J}} = \sigma\underline{\vec{E}}$. Die Materialparameter ε, μ und σ hängen nicht von den Feldgrössen ab. Dafür können sie komplex sein, was dann einer Phasenverschiebung zwischen den Komponenten der beteiligten Felder entspricht, d. h. die Trägheit des Materials beim Polarisations- bzw. Magnetisierungsvorgang berücksichtigt. Materialparameter sind Funktionen der Frequenz.

7.1.2 Grenzbedingungen

Die Grenzbedingungen können im Wesentlichen übernommen werden und erden für die Phasoren geschrieben, d. h. sie haben die Form $\underline{\vec{E}}_{i,T} - \underline{\vec{E}}_{k,T} = \underline{\vec{0}}$, etc.

7.1.3 Diskussion des Wellenverhaltens

Die Diskussion der Wellenzahl k als Funktion der Materialparameter ε, μ und σ liefert Anhaltspunte für das Verhalten der Lösungen der homogenen als auch der inhomogenen Lösungen. Es gilt:

$$k^2 = \omega^2\mu\,{}^{\mathrm{c}}\varepsilon = \omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma = \omega\mu(\omega\varepsilon - j\sigma) \tag{7.5}$$

Insbesondere lässt sich k als $\beta - j\alpha$ schreiben, wobei α und β die Ortsabhängigkeit charakterisieren und man α als *Dämpfungkonstante* und β als *Phasenkonstante* bezeichnet. Die grösse $\gamma = \alpha + j\beta = jk$ heisst *Fortpflanzungskonstante*.

In zwei wichtigen Spezialfällen kann k recht einfach als Funktion der Materialparameter dargestellt werden:

- Im *Leiter* ist k^2 fast rein imaginär, d. h. $\sigma \gg \omega\varepsilon$.
- Im *Isolator* ist k^2 fast rein reell, d. h. $\sigma \ll \omega\varepsilon$.

Sowohl k als auch α und β haben die Dimension einer inversen Länge. Daher betrachtet man oft ihre Kehrwerte und kann so als praktische *Vergleichslängen* für eine wesentliche Variation der Felder folgende Grössen verwenden: Im Falle *kleiner Leitfähigkeit* die Wellenlänge des Mediums

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \underset{\sigma \ll \omega\varepsilon}{\approx} \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{7.6}$$

und im Falle *hoher Leitfähigkeit* die Eindringtiefe oder Skintiefe, welche ein Mass für die Dämpfung ist:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \underset{\sigma \gg \omega\varepsilon}{\approx} \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{7.7}$$

Die Grössen α und β können auch exakt berechnet werden, nämlich über:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 + 1} - 1} \tag{7.8}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 + 1} + 1} \tag{7.9}$$

Weiter gilt:

$$|k| = \sqrt{\omega\mu}\sqrt[4]{(\omega\varepsilon)^2 + \sigma^2} \qquad \arg k = -\frac{1}{2}\arctan\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{7.10}$$

8 Energie im Elektromagnetischen Feld

8.1 Poynting'sches Energiekonzept

In den Maxwell-Gleichungen kommen keine Energieterme und auch keine Kräfte vor, d. h. es gibt keine Verbindung zu anderen Gebieten der Physik. Um dennoch die physikalisch universelle Grösse der Energie in einen Zusammenhang mit der Maxwell'schen reinen Feldtheorie zu bringen, schlug Poynting ein Energiekonzept vor, welches die Energie als *Energiedichtefeld* $w(\vec{r}, t)$ definiert.

Jedes Volumen V enthält zu jedem Zeitpunkt eine bestimmte elektromagnetische Energiemenge W_{elmag}. Dann wird das Energiedichtefeld zu:

$$w(\vec{r}, t) = \lim_{V \to 0} \frac{W_{elmag}}{V} \qquad (\vec{r} \text{ in } V) \tag{8.1}$$

8.1.1 Energiedichte

Die *elektrische* Energiedichte ist definiert als:

$$w_e = \frac{1}{2} D_n E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \tag{8.2}$$

Und die *magnetische* Energiedichte ist definiert als:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \tag{8.3}$$

Die gesamte elektromagnetische Feldenergiedichte w erhält man durch Addition der elektrischen und der magnetischen Feldenergiedichte:

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \tag{8.4}$$

8.2 Energieflussdichte

Wenn der Energieerhaltungssatz gilt, muss jede Energieänderung im Volumen V entweder einer *Umwandlung* von elektromagnetischer Energie in eine andere Form sein oder es existiert ein *Energiefluss* durch die Oberflächt ∂V von V.

8.2.1 Poynting-Vektor

Der Energiefluss wird durch die Energieflussdichte $\vec{S}$ beschrieben. Der Betrag von $\vec{S}$ die Energiemenge bezeichnet, welche pro Zeit und pro Fläche an einer bestimmten Stelle fliesst. Die Richtung von $\vec{S}$ ist die Fliessrichtung.

Der Vektor $\vec{S}$ wird auch *Poynting-Vektor* genannt und lässt sich aus den Feldgrössen wie folgt berechnen:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{8.5}$$

Dann kann der Energieerhaltungssatz geschrieben werden als:

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_V w \, dV = - \iiint\limits_V p \, dV - \oint\limits_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{F} \qquad \text{bzw.} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -p - \operatorname{div} \vec{S} \tag{8.6}$$

Hier bezeichnet p die Leistung, mit welcher elektromagnetische Energie in eine andere Form umgewandelt wird, p ist positiv, wenn die lektromagnetische Energie abnimmt.

8.2.2 Leistung

Jedes Integral des Poynting-Vektors über eine geschlossene Flächte hat die Bedeutung einer Leistung, welche real und messbar ist. Es gilt:

$$P = -\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{F} \tag{8.7}$$

P wird positiv, wenn das Volumen V elektromagnetische Leistung *aufnimmt*.

8.3 Poynting-Theorem

Das *Poynting-Theorem* besgt, dass der Energiefluss duch die Oberfläche ∂V in das beliebige Volumen V hinein gleich der zeitlichen Änderung des elektromagnetischen Energieinhalts in V plus der dort in andere Energieformen (Wärme, Chemie, Materialstrukturänderungen) umgesetzten Leistung ist. Formal:

$$-\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + p_j + p_{elek} + p_{mag} \right) dV \tag{8.8}$$

In linearem Material, das durch die drei Konstanten ε, μ und σ beschrieben wird, gilt dann:

$$-\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \left(\varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \cdot \vec{E} \right) dV \tag{8.9}$$

8.3.1 Komplexes Poynting-Theorem

Betrachtet man den stationären Zustand, genügt es, die beiden zeitunabhängigen Vektoren

$$\underline{\vec{S}}(\vec{r}) := \frac{1}{2} \left(\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \times \underline{\vec{H}}^*(\vec{r}) \right) \qquad \underline{\vec{S}}^{\sim}(\vec{r}) := \frac{1}{2} \left(\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \times \underline{\vec{H}}(\vec{r}) \right) \tag{8.10}$$

anzugeben um den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$ anzugeben. Beachte die Zeigerschreibweise in obigen Gleichungen.

Meistens interessiert nur der zeitliche Mittelwert des Poynting-Vektors. Dann genügt es sogar, nur den sogenannten *komplexen Poynting-Vektor* $\underline{\vec{S}}$ anzugeben. Es gilt dann:

$$\vec{S}_0(\vec{r}) = \Re\left(\underline{\vec{S}}(\vec{r}) \right) \tag{8.11}$$

Zum komplexen Poynting-Vektor existiert auch ein komplexes Poynting-Theorem:

$$-\oint_{\partial V} \underline{\vec{S}} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{2} \iiint_V \left(j\omega \left(\mu \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{H}}^* - \varepsilon^* \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right) + \sigma^* \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right) dV \tag{8.12}$$

$$-\oint_{\partial V} \underline{\vec{S}}^{\sim} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{2} \iiint_V \left(j\omega \left(\mu \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{H}} + \varepsilon \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}} \right) + \sigma \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}} \right) dV \tag{8.13}$$

Beachte, dass bis hier die Materialparameter auch komplex sein können.

Setzt man die Materialparameter als reell voraus, ergibt sich für den zeitliche Mittelwert der in das Volumen V hineinfliessenden Leistung P_0:

$$P_0 = -\oint_{\partial V} \vec{S}_0 \cdot d\vec{F} = -\oint_{\partial V} \Re(\underline{\vec{S}}) \cdot d\vec{F} = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* dV \tag{8.14}$$

Beachte, dass die elektrische und magnetische Energieänderungen im Zeitmittel rausfallen – die Menge der elektromagnetischen Energie kann sich im stationären Zustand im Zeitmimttel nicht verändern.

9 Berechnung der Zweipolparameter

9.1 Die Zustandsgrössen U, I und P

9.1.1 Spannung U und Maschenregel

Definition der Spannung:

$$U := \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{9.1}$$

Die skalare grösse Spannung des Netzwerkmodells ist im feldtheoretischen Modell mit zwei Punkten A und B sowie einem Verbindungsweg Γ verkoppelt.

Maschenregel:

$$U_{ind} + \sum_{i=1}^{n} U_i = 0 \tag{9.2}$$

Im statischen Fall verschwindet U_{ind}.

9.1.2 Strom I und Kontenregel

Verallgemeinerte Stromdefinition:

$$I := \iint_F \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{F} \tag{9.3}$$

In praktischen Fällen kann der Anteil mit der Verschiebungsstromdichte $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ oft vernachlässigt werden.

Mit der zweiten Maxwell-Gleichung kann dies auch als Umlaufintegral längs der Berandung ∂F der Fläche F geschrieben werden:

$$I := \oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{l} \tag{9.4}$$

Die skalare Grösse Strom des Netzwerkmodells ist im feldtheoretischen Modell mit einer orientierten Fläche F bzw. deren obenfalls orientierten Berandung ∂F gekoppelt. Die Orientierung von F bildet mit dem Umlaufsinn von ∂F eine Rechtsschraube.

Knotenregel:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{9.5}$$

9.1.3 Leistung P

Einem Element, in welchem Leistung umgesetzt wird, entspricht in der Feldtheorie entweder

- eine (nicht unbedingt geschlossene Fläche), *durch* welche die Leistung tritt, oder
- ein Volumen, *in* dm die Leistung umgesetzt wird.

Mindestens im quasistatischen Fall lässt sich die bekannte Formel

$$P = U \cdot I \tag{9.6}$$

aus den Feldgleichungen herleiten.

9.2 Kenngrössen der elementaren Zweipole C, L und R

9.2.1 Kapazität C

Die Kapazität kann mit folgenden Formeln berechnet werden:

$$C = \frac{1}{U^2} \iiint\limits_{V_\infty} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV \tag{9.7}$$

$$C = \frac{1}{U^2} \iiint\limits_{G_Q} \phi \varrho \, dV \tag{9.8}$$

$$C = \frac{1}{U} \oint\limits_{\partial \mathrm{Elek}_1} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \frac{Q}{U} \tag{9.9}$$

Dabei ist ϕ das Potential, ϱ die Raumladungsdichte und G_Q das Quellgebiet, also die Oberflächen $\partial\mathrm{Elek}_1$ und $\partial\mathrm{Elek}_2$ der beiden Elektroden sind. In der letzten Formel tritt wieder die altebekannte Berechnungsvariante der Kapazität auf.

Es lässt sich zeigen, dass die Kapazität dann nicht von der Spannung abhängt, wenn der Raum mit *linearem* Material gefüllt ist.

9.2.2 Induktiviät L

Die Induktivität kann mit folgenden Formeln berechnet werden:

$$L = \frac{1}{I^2} \iiint\limits_{V_\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} \, dV \tag{9.10}$$

$$L = \frac{1}{I^2} \iiint\limits_{G_Q} \vec{J} \cdot \vec{A} \, dV \tag{9.11}$$

$$\tag{9.12}$$

Dabei ist $\vec{A}$ das Vektorpotential und $\vec{J}$ die Stromdichte, welche beide nur im Quellgebiet G_Q nicht verschwinden, wodurch der Integrationsbereich verkleinert wird.

Fliesst der Strom nur in dünnen Drähten vereinfacht sich die Angelegenheit zu

$$L = \frac{1}{I} \oint\limits_{D} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{I} \iint\limits_{F_D} \vec{B} \cdot d\vec{F} = \frac{\Phi}{I} \tag{9.13}$$

wobei D die Drahtschleife und F_D die von D berandete Fläche bezeichnet.

Es lässt sich zeigen, dass die Induktivität L dann nicht vom Strom abhängt, wenn das zugehörige Feldvolumen V nur *lineare* Material enthält.

9.2.3 Widerstand R

Hier interessiert der Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischem Feld:

$$R = \frac{1}{I^2} \iiint\limits_{V} \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV \tag{9.14}$$

In einfachen Fällen, wenn sowohl Strom als auch Spannung auf plausible Art eindeutig definiert werden können, sollte das elementare Gesezt $R = U/I$ vorgezogen werden, weil dann nur die Linienintegrale (9.1) und (9.3) auszuwerten sind.

Beim Widerstand kommt am klarsten zum Ausdruck, dass diesem Zweipol ein gewisses Feld*volumen* entspricht.

9.2.4 Linearität

Im allgemeinen Fall sind die obigen drei Zweipolkenngrössen offensichtlich von U bzw. von I abhängig, denn diese beiden Grössen erscheinen in den Bestimmungsgleichungen – die Elemente verhalten sich also nichtlinear.

Es lässt sich aber zeigen, dass die Kenngrössen der elementaren Zweipole R, L und C immer dann konstant sind, d. h. die Elemente lineares Verhalten zeigen, wenn das Material innerhalb des zugehörigen Volumens V *linear* ist.

Index