Technische Mechanik

Rev. 107, 8.8.2008

1 Allgemeines

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{b}$ und $\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
Vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{1}$$

2 Grundlagen

2.1 Lage und Geschwindigkeit materieller Punkte

Freiheitsgrad: minimale Anzahl Lagekoordinaten, die zur eindeutigen Bestimmung der Lage nötig sind. Materieller Pkt. im Raum: FG 3; starrer Körper: FG 6. Bei einem System aus mehrern Körpern:

$$f = n - b \qquad n: \text{Summe FG der Körper}, \ b: \#\ \text{linear unabhängiger Bindungsgl.} \tag{2}$$

Bahnkurve eines mat. Punktes: Vektorfunktion $\vec{r}(t)$. Geschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}$.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{z} \tag{3}$$

$$v = |v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{4}$$

Zylinderkoordinaten: $\vec{r} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$ und $\vec{e_\rho} = \cos\varphi\vec{e_x} + \sin\varphi\vec{e_y}$, $\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\vec{e_x} + \cos\varphi\vec{e_\varphi}$,$\vec{e_z} = \vec{e_z}$.

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \dot{z}\vec{e_z} \tag{5}$$

Bei Polarkoordinaten fällt der Term $\dot{z}\vec{e_z}$ weg.

2.2 Starre Körper

Distanz zwischen zwei beliebigen Punkten P und Q ist konstant: $(\vec{r_P} - \vec{r_Q})^2 = \text{const.}$

SdpG: (Satz der projizierten Geschwindigkeiten) Projektionen $\vec{v_P}'$, $\vec{v_Q}'$ der Geschw. zweier beliebiger Pkte. P und Q auf ihre Verbindungsgerade sind gleich: $\vec{v_P}' = \vec{v_Q}'$. Mit $\vec{e}$: (Einheits-)vektor in Verbindungsgeradenrichtung.

$$\vec{v}_P \cdot \vec{e} = \vec{v}_Q \cdot \vec{e} \qquad \text{konkret:} \quad \vec{v}_P \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{v}_Q \cdot \overrightarrow{PQ} \tag{6}$$

- *Starre Bewegung:* SdpG ist zu jedem Zeitpunkt für beliebige Pkte.-Paare erfüllt.
- *Translation:* $\vec{v_P} = \vec{v}$ für alle Punkte P.
- *Rotation:* Zwei Pkte. P und Q bleiben in Ruhe und mit dem SdpG auch alle Pkte. auf ihrer Verbindungsgerade → Rotationsachse. P und Q müssen *nicht* zum Körper gehören.
- *Ebene Bewegung:* Alle Geschw. sind zu einer Ebene E parallel. (Falls nicht starr: zusätzlich alle Pkte. auf Normalen zu E besitzen die gleiche Geschw.).

2.3 Ebene Bewegungen

Momentan entweder Translation (alle Geschw. parallel) mit Translationsgeschwindigkeit $\vec{v}$ oder Rotation mit Rotationsschnelligkeit ω und Momentanzentrum M.

Momentanzentrum: Bei einer *Rotation* ist $\vec{v_P}$ senkrecht zur Verbindungsgeraden von P und dem Momentanzentrum M. ($\vec{r_P}$: Abstandsvektor zw. M und P, $\vec{\omega}$ senkrecht zur Ebene).

$$\vec{v_P} = \omega \vec{r_P} \qquad \vec{\omega} = \omega \vec{e_z} \qquad \vec{v_P} = \vec{\omega} \times \vec{r_P} \tag{7}$$

Bei einem System hat jeder starre Körper ein Momentanzentrum!!!
Polbahn: Bahn des Momentanzentrums bei einer ebenen Bewegung. Bei festem Bezugsystem: feste Polbahn; bei mit dem Körper verbundenem Bezugssystem: bewegliche Polbahn.

2.4 Räumliche Bewegung

Spezialfall *Kreiselung:* Ein Pkt. des Körpers bleibt fixiert. Eine Kreiselung ist *momentan* eine Rotation. Und damit berechnet sich die Geschw. eines beliebigen Pktes P mit $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$. Die Gerade durch O in Richtung $\vec{\omega}$ heisst *Momentanachse.*

Kinemate: Die Geschw. irgendeines Pktes. eines starren Körpers ist bestimmt durch zwei Vektoren: die *Translationsgeschwindigkeit* $\vec{v}_B$ eines Pktes. B und die *Rotationsgeschwindigkeit* $\vec{\omega}$. Das Paar $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ heisst *Kinemate.*

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BP} \tag{8}$$

Invarianten: Rotationsgeschw. ist vom Bezugssystem unabhänig $\rightarrow$ Invariante.

$$\vec{I}_1 = \vec{\omega} \qquad I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_B \tag{9}$$

Bewegung im Raum: Translation falls $\vec{\omega} = \vec{0}$; Rotation falls $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ und $I_2 = 0$; Schraubung falls $I_2 \neq 0$. Bei ebener Bewegung ist I_2 immer 0, da $\vec{\omega} \perp \vec{v}_B$.

2.5 Kraft und Moment

Reaktionsprinzip: Übt ein mat. Pkt. P_1 auf einen anderen Pkt. P_2 die Kraft $\vec{F}$ (in P_2) aus (Actio), so übt P_2 auf P_1 eine Kraft $-\vec{F}$ aus (Reactio). Wirkungslinie bei beiden gleich. *Kontaktkraft:* Actio und Reaction greifen im selben geom. Pkt. an (Berührpkt der zwei versch. (!) Körpern). *Fernkraft:* Kräfte auf Verbindungsgeraden der beiden Pkte. *äussere Kraft:* Reactio greift ausserhalb des betrachteten Systems an. *innere Kraft:* Reactio greift innerhalb des betrachteten Systems an. $\rightarrow$ *Freischneiden:* Welches System will man untersuchen?

Moment: Das Moment $\vec{M}_O$ einer Kraft $\vec{F}$ mit Angriffspkt. P *bezüglich* O ist wie folgt definiert (mit $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$):

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \qquad M_O = \pm dF \qquad d\text{: Hebelarm} \tag{10}$$

Der *Hebelarm* d ist der kürzeste Abstand zw. Wirkungslinie und O. $\rightarrow$ Das Moment ändert sich nicht, wenn die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie verschoben wird! Richtung des Moments: Senkrecht zu $\vec{r}$ und $\vec{F}$, Korkenzieherregel!

Moment bezüglich einer Achse: Wir finden das Moment bezüglich einer Achse g durch den Bezugspunkt O, indem wir die Kraft auf die Ebene senkrecht zur Achse projizieren, den Betrag der Projektion mit dem (senkrechten) Abstand ihrer Wirkungslinie von der Achse multiplizieren und das richtige Vorzeichen aus der Korkenzieherregel ablesen.

$$M_g = \vec{e}_g \cdot \vec{M}_O \tag{11}$$

2.6 Leistung

Für eine Kraft $\vec{F}$ mit Angriffspunkt P ist die Leistung $\wp$ definiert durch: $\wp = \vec{F} \cdot \vec{v}_P$. Ist $\wp = 0$ so ist die Kraft *leistungslos*, d.h. sie steht immer senkrecht auf der Geschwindigkeit.
Gesamtleistung: $\wp = \sum_i \wp_i$.
Für *reine Rotation:* $\wp = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$.

3 Statik

3.1 Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen

Kräftegruppe: Mehrere an einem Körper angreifende Kräfte: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$. Die Angriffspunkte P_i dargestellt durch die Ortsvektoren $\vec{r}_i$ müssen dazugedacht werden!

Resultierende: Unabhängig von den Angriffspunkten!

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \tag{12}$$

resultierendes Moment einer Kräftegruppe *bezüglich* O:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{13}$$

Gesamtleistung einer Kräftegruppe:

$$\wp = \sum_{i=1}^{N} \wp_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \tag{14}$$

Bei einer Starrkörperbewegung:

$$\wp = \vec{R} \cdot \vec{v}_B + \vec{M}_B \cdot \vec{\omega} \tag{15}$$

statische Äquivalenz: Zwei Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\}$, $\{\vec{G}_j\}$ sind statisch äquivalent ($\{\vec{F}_i\} \Leftrightarrow \{\vec{G}_j\}$), wenn ihre Gesamtleistung bei beiliebigen Starrkörperbewegungen gleich sind:
$\wp(\{\vec{F}_i\}) = \wp(\{\vec{G}_j\}) \ \forall \ \{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ (Starrkörperbewegungen).
Satz: Zwei Kräftegruppen sind genau dann statisch äquivalent, wenn ihre Resultierenden und ihre resultierenden Momente (bezüglich eines beliebigen Punktes P) gleich sind.
Satz: Zwei Kräfte sind genau dann statisch äquivalent, wenn sie vektoriell gleich sind und ihre Wirkungslinien übereinstimmen.

Im Rahmen der statischen Äquivalenz darf am starren Körper eine Kraft entlang der Wirkungslinie verschoben werden; sie ist ein *linienflüchtiger* Vektor.
Eine Kräftegruppe heisst *statisch äquivalent null*, falls ihre Resultierende $\vec{R}$ und ihr resultierendes Moment $\vec{M}_O$ bezüglich O verschwinden: $\vec{R}(\{\vec{F}_i\}) = \vec{0}$ und $\vec{M}_O(\{\vec{F}_i\}) = \vec{0}$. Man schreibt $\{\vec{F}_i\} \Leftrightarrow \vec{0}$ und spricht von einem *Nullsystem* oder einem *System im Gleichgewicht.*

Kräftepaar: Besteht aus zwei Kräften gleichen Betrags, die auf verschiendenen Wirkungslinien entgegengesetzte Richtung haben. Es gilt:

$$\vec{R} = 0 \qquad \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \qquad M_O = dF \tag{16}$$

Der Betrag des Moments berechnet sich einfach aus dem Abstand der Wirkungslinien d. Hier ist das Moment *unabhängig* vom Bezugspunkt.
Ein gegebener Momentvektor $\vec{M}$ lässt sich durch unendlich viele verschiedene Kräftepaare realisieren: Es müssen nur beide Kraftvektoren in einer Ebene senkrecht zu $\vec{M}$ liegen und die Formel $M = dF$ gelten.

Dyname: Das Paar $\{\vec{R}, \vec{M}_O\}$ heisst Dyname der Kräftegruppe (bezüglich des Punktes O). Man kann sie sich realisiert denken durch eine in O angreifende Einzelkraft $\vec{R}$ und ein Kräftepaar $\vec{M}_O$. Die Berechnung der Dyname einer Kräftegruppe nennt man auch *Reduktion* der Kräftegruppe.
Achtung: $\{\vec{R}, \vec{M}_O\}$ hinschreiben!
Transformation: Das Moment bezglich P berechnet sich folgendermassen aus demjenigen bezüglich O:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{r}_{PO} \times \vec{R} \qquad \vec{R}_P = \vec{R}_O = \vec{R} \tag{17}$$

Invarianten der Dyname: $\vec{I}_1 = \vec{R}$ und $I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_O$. Im allgemeinsten Fall ist die Dyname eine *Schraube*, bei der Resultierende und Moment parallel sind. Dies gilt nur bezüglich der *Schrauben-* oder *Zentralachse.*
Satz: Eine Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu ...

- einem *Nullsystem,* falls $\vec{R} = \vec{0}$ und $\vec{M}_O = \vec{0}$ sind,
- einem *Kräftepaar,* falls $\vec{R} = \vec{0}$ und $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ sind,
- einer *Einzelkraft,* falls $\vec{R} \neq \vec{0}$ und $I_2 = 0$ sind,
- einer *Schraube,* falls $I_2 \neq 0$ ist.

Beim *Kräftepaar* ist das Moment *unabhängig vom Bezugspunkt!*
Wenn die Wirkungslinie einer *statisch äquivalenten Einzelkraft* gefunden werden soll, muss das Moment bezüglich eine Punktes P gleich bleiben!

3.2 Kräftemittelpunkt und Massenmittelpunkt

Parallele Kräftegruppe: $\vec{F}_i = F_i\vec{e}$, für $i = 1, \dots n$. Damit wird die Resultierende $\vec{F} = R\vec{e}$. Das Moment wird aber senkrecht auf der Resultierenden zu stehen kommen, daher wird die zweite Invariante $I_2 = 0$ und so lässt sich eine solche Kräftegruppe auf ein *Moment* oder eine *Einzelkraft* reduzieren.

- *Fall $R = 0$:* Die Kräftegruppe kann hier auf ein Moment $\vec{M}$ reduziert werden, welches *unabhängig* vom Bezugspunkt ist (kein Index!); Man nennt $\vec{N}$ das *Dipolmoment der Kräftegruppe*, woraus das Moment $\vec{M}$ folgt. Auch $\vec{N}$ ist unabhängig vom Bezugspunkt.

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{N} F_i \vec{r}_i \qquad \vec{M} = \vec{N} \times \vec{e} \tag{18}$$

- *Fall $R \neq 0$:* Die parallele Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu einer Einzelkraft. Dann nennt man C den *Kräftemittelpunkt* der Kräftegruppe.

$$\vec{r}_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{N} F_i \vec{r}_i \qquad \text{mit} \qquad R = \sum_{i=1}^{N} F_i \tag{19}$$

Schwerpunkt/Massenmittelpunkt: (Spezialfall vom Kräftemittelpunkt.) Im homogenen Schwerefeld der Erde ist das infinitesimale Kraftelement $d\vec{G}$ gegeben durch $d\vec{G} = \vec{g}dm$, wobei $\vec{g}$ die vertikale Erdbeschleunigung mit Betrag $g \approx 9.81\,\mathrm{ms}^{-1}$ bezeichnet.

Um den Kräftemittelpunkt der Gewichtskräfte (den Schwerpunkt!) zu bestimmen muss man über den betrachteten materiellen Bereich B integrieren:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \iiint\limits_B \vec{r}dm \qquad \text{mit} \qquad m = \iiint\limits_B dm \tag{20}$$

Dabei ist m also die Gesamtmasse des materiellen Bereichs B.

Für einen im Bereich K *homogenen Körper* mit konstanter Dichte λ und $dm = \lambda dV$ ergbibt sich:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{V} \iiint\limits_K \vec{r}dV \tag{21}$$

Wobei diese Formel identisch mit jener für den geometrischen Schwerpunkt ist.

Für eine *homogen* mit Masse belegte Fläche K_a oder Kurve K_l gelten analoge Formeln:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{A} \iint\limits_{K_a} \vec{r}dA \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{r}_C = \frac{1}{L} \int\limits_{K_l} \vec{r}ds \tag{22}$$

Fals ein Körper aus *Teilen mit einfach zu bestimmenden Schwerpunkten* zusammengesetzt ist, so kann man den Gesamtschwerpunkt aus den Schwerpunkten der Teilkörper berechnen:

$$G\vec{r}_C = \sum G_i \vec{r}_i \tag{23}$$

Mit: G: Gesamtgewicht, G_i: Gewicht des i-ten Körpers.

3.3 Prinzip der virtuellen Leistungen

Virtueller Bewegungszustand: Gedachter Bewegungszustand, der *keinen* Bezug zu den wirklich möglichen Bewegungszuständen haben muss. Zur Unterscheidung von wirklichen (möglichen) Bewegungszuständen werden virtuelle mit einer Tilde bezeichnet: $\{\tilde{v}\} \rightarrow$ Beliebiger virtueller Bewegungszustand, $\{\tilde{v}_o, \tilde{\omega}\} \rightarrow$ virtueller Starrkörper-Bewegungszustand.

- *zulässiger* virtueller Bewegungszustand: verletzt keine Bindungen; hält sich also z.B. an Einschränkungen der Bewegungsmöglichkeiten durch Gelenke; ansonsten sind v und ω aber völlig beliebig und unabhänig von den angreifenden Kräften.

- *unzulässiger* virteller Bewegungszustand: verletzt Bindungen, ist also nicht zulässig.

Virtuelle Leistung: Für virtuelle Bewegungszustände können die Leistungen der angreifenden Kräfte berechnet werden. Man unterscheidet diese *virtuellen* Leistungen von den wirklichen (bei denen die Geschwindigkeiten von den Kräften abhängen) durch eine Tilde: $\tilde{\wp}$.
Virtuelle Leistung der inneren bzw. äusseren Kräften: $\tilde{\wp}^{(i)}$ bzw. $\tilde{\wp}^{(a)}$.

Ruhe/Ruhelage: Ein System befindet sich in *Ruhe*, wenn alle Geschwindigkeiten null sind. Eine *Ruhelage* ist eine Lage, in der das System in Ruhe bleibt, wenn es zu einem beliebigen Zeitpunkt in Ruhe war.

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL): Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

$$\tilde{\wp} = \tilde{\wp}^{(i)} + \tilde{\wp}^{(a)} = 0, \forall \{\tilde{v}\} \tag{24}$$

Nachträglich muss kontolliert werden, ob z. B. Normalkräfte in einseitigen Bindungen oder Fadenkräfte etc. in die richtige Richtung zeigen, Haftreibungsgesetze erfüllt sind oder die Materialien die Kräfte aushalten.

Kochrezept (PdvL):

1. Den Stab (bei dem die Stabkraft gesucht ist) entfernen, die Stabkraft an beiden Knoten (Gelenken) als Zugkraft einführen.
2. Den Bewegungszustand des entstandenen Mechanismus bestimmen.
3. das PdvL formulieren, d. h. die Leistungen der angreifenden Kräfte für den Bewegungszustand aufsummieren und gleich null setzen.
4. nach der Stabkraft auflösen (ein positives Vorzeichen entspricht einer Zugkraft, ein negatives Vorzeichen einer Druckkraft).

3.4 Hauptsatz der Statik

Hauptsatz der Statik: In einer Ruhelage müssen alle (äusseren) Kräfte im Gleichgewicht sein:

$$\vec{R} = \vec{0} \qquad \text{und} \qquad \vec{M}_O = \vec{0} \tag{25}$$

Zusatzpostulat zum PdvL: Ein *starrer Körper* befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen *Starrkörperbewegungszustand* verschwindet.

Umkehrung des Hauptsatzes: *Gilt NUR für starre Körper!* Das Gleichgewicht der äusseren Kräfte ($\vec{R} = \vec{0}$ und $\vec{M}_O = \vec{0}$ ist notwendig und *hinreichend* für eine Ruhelage eines *starren* Körpers (sofern die Kräfte im System möglich sind).

$$\wp = \vec{R} \cdot \tilde{\vec{v}}_O + \vec{M}_O \cdot \tilde{\omega} = 0 \tag{26}$$

Die drei Gleichungen $\vec{R} = \vec{0}$ nennt man *Komponentenbedingungen*, die drei Gleichungen $\vec{M}_O = 0$ *Momentenbedingungen*, alle zusammen *Gleichgewichtsbedingungen.*

Auch hier müssen alle für das Gleichgewicht nötigen Kräfte *möglich* sein.

3.5 Bindungen

Unter einer Bindung versteht man allgemein eine Einschränkung der Bewegungsfreiheit. Die in der Bindung wirkenden Kräfte bezeichnet man als Bindungskräfte, Lagerkräfte bzw. -momente oder als Reaktionen.

Bewegungen, die durch die Bindung verhindert werden heissen *unzulässige Bewegungen*, im Gegensatz zu den *zulässigen Bindungen*, die nicht verhindert werden.

In starren Bindungen können *Reibungsreaktionen* als Bindungskräfte parallel zu zulässigen Bewegungen betrachtet werden. In *reibungsfreien Bindungen* werden die Reibungsreaktionen vernachlässigt.

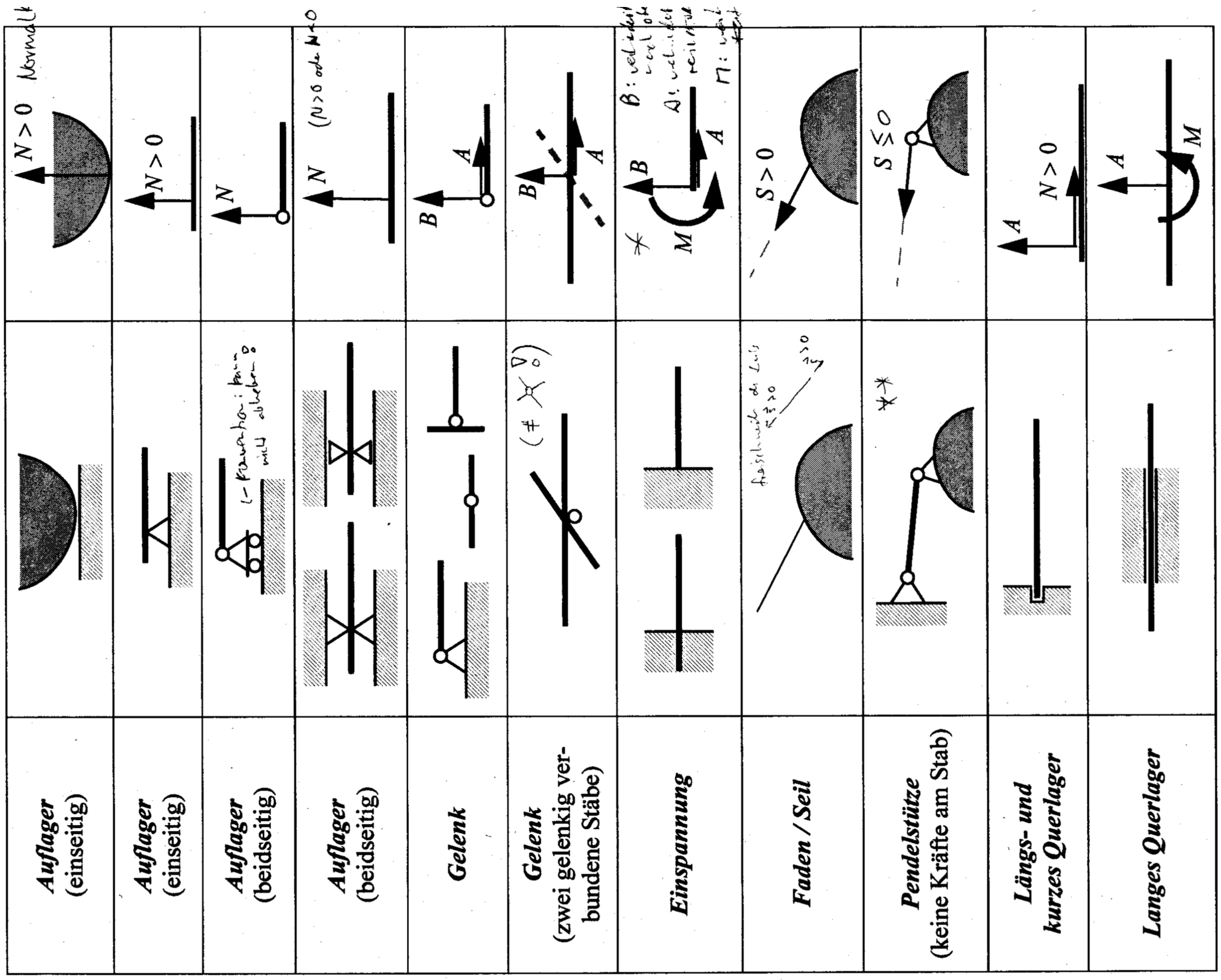

Abbildung 1: Die gebräuchlichsten reibungsfreien Bindungen in ebenen Systemen.

Statische Bestimmtheit Ein System heisst *statisch bestimmt*, falls man die Lagerkräfte und -momente eindeutig aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen kann, andernfalls heisst es *statisch unbestimmt*. Die Differenz zwischen Anzahl Unbekannten und Anzahl Gleichungen ist der *Grad* der statischen Unbestimmtheit.

Kinematische Bestimmtheit Ein System ist *kinematisch bestimmt*, falls auf Grund der Lagerung keine zulässigen Bewegungen möglich sind, ansonsten ist es *kinematisch unbestimmt*.

3.6 Analytische Statik

Trennen von Systemen: Um den Hauptsatz der Statik auf ein *System* von starren Körpern anwenden zu können, muss dieses *getrennt* werden, weil man sonst zu wenig Gleichungen erhält.

Man trennt in Bindungen, die keine vollständige Dyname enthalten. An den Trennstellen müssen (je nach Bindungstyp) Kräfte, sogenannte *Schnittkräfte* (und ev. Momente) eingeführt werden. Gemäss dem Reaktionsprinzip haben die Schnittkräfte an den beteiligten Körpern umgekehrte Richtungen!

Wenn die Schnittkräfte nicht gesucht sind, ist es oft am einfachsten, die Gleichgewichtsbedingungen für das ganze System zu formulieren. Die restlichen Gleichungen konstruiert man mit geschickten Momentenbedingungen für die Teile des Systems, worin natürlich die Schnittkräfte nicht vorkommen dürfen.

Kochrezept (Hauptsatz):

1. Materielles System abgrenzen; freigeschnittenes System zeichnen (Kräfte statt Lager).
2. Einführung der äusseren Lasten und Bindungskräfte.
3. Wahl eines zweckmässigen Koordinatensystems.
4. Abzählen der Gleichungen und Unbekannten.
5. Komponentenweise Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen und eventuell weiterer Gleichungen.
6. Falls nötig: System trenne, Schnittkräfte einführen und Schritte 3 bis 5 wiederholen (dabei nur linear unabhängige Gleichungen mitnehmen!).
7. Auflösung der Gleichungen.
8. *Diskussion der Resultate.*

Wann PdvL, wann Hauptsatz?

- Nur eine oder nur wenige Kräfte → PdvL!
- Falls alle Lager- und Bindungskräfte gesucht sind → Trennung und Hauptsatz!

3.7 Reibung

In einer Bindung müssen zusätzlich zur Normalkraft $\vec{N}$ eine *Reibungskraft* $\vec{F}$ und ein *Reibungsmoment* $\vec{M}_f$ in Richung zulässiger Bewegungen eingeführt werden.

Ist der Berührpunkt B momentan in Ruhe liegt *Haftreibung* vor, sonst *Gleitreibung*.

Haftreibungsgesetz: $|\vec{F}| \leq \mu_0|\vec{N}|$, wobei μ_0 der Haftreibungskoeffizient ist.

Gleitreibungsgesetz: $|\vec{F}| = \mu_1|\vec{N}|$, wobei μ_1 der Gleitreibungskoeffizient ist. Die *Richtung* der Gleitreibungskraft ist immer *entgegengesetzt* zur Bewegungsrichtung. Vektoriell geschrieben gilt also ($\vec{v}_B$: Geschw. des Berührpunktes B):

$$\vec{F} = -\mu_1|\vec{N}|\frac{\vec{v}_B}{|\vec{v}_B|} \tag{27}$$

Rollreibungsgesetz:

- Ruhe: $|\vec{M}_f| \leq \mu_2|\vec{N}|$
- Bewegung: $|\vec{M}_f| = \mu_2|\vec{N}|$ Auch hier muss $\vec{M}_f$ *entgegengesetzt* zu $\vec{\omega}$ orientiert sein.

μ_2 nennt man Rollreibungslänge (hat Dimension einer Länge). Wenn nicht explizit erwähnt, kann die Rollreibung in Aufgaben vernachlässigt werden!

Unterschied Haft-/Gleitreibung:

- *Ruhe:* Reibungskraft (Reibungsmoment) muss aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden und das Reibungsgesetz liefert *nachträglich* ein Kriterium dafür, ob Ruhe möglich ist.
- *Bewegung:* Reibungskraft (Reibungsmoment) ist durch die Normalkraft und die Reibungskonstante bestimmt, d. h. das Reibungsgesetz liefert eine *zusätzliche Gleichung.*

4 Dynamik

4.1 Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

- Kartesische Koordinaten: $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$
- Zylinderkoordinaten: $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$
- Ebene Polarkoordinaten: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

Kreisbewegung: $\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

- Radial nach innen gerichtete Komponente vom Betrag: $r\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{r}$ (Zentripetalbeschleunigung).
- Tangentiale (in positiver φ-Richtung) gerichtete Komponente vom Betrag: $r\ddot{\varphi}$

4.2 Trägheitskräfte, PdvL

Trägheitskraft: Trägheitskräfte sind *fiktive* und nicht reale Kräfte – sie verletzen das Reaktionsprinzip!

- Trägheitskraftdichte: $\vec{f}^{(t)} = -\rho\vec{a}$ (ρ: spezifische Masse)
- Ininitesimales Träheitskraftelement für ein infinitesimales Volumenelement:
$$d\vec{F}^{(t)} = -\rho\vec{a}dV = -\vec{a}dm \tag{28}$$

Verallgemeinertes PdvL: Die Gesamtleistung aller wirklichen Kräfte sowie aller (für die Beschleunigungen der wirklichen Bewegung berechneten) Trägheitskräfte verschwindet für jeden virtuellen Bewegungszustand.

$$\wp^{(i)} + \wp^{(a)} + \wp^{(t)} = 0 \quad \forall \ \{\tilde{\vec{v}}\} \tag{29}$$

Inertialsystem: Alle mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Systeme sind gleichwertig und liefern dieselben Gleichunge. Sie hiessen Inertialsysteme. Alternativ können sie auch dadurch definiert werden, dass in ihnen das PdvL gilt.

4.3 Newtonsches Bewegungsgesetz

Anwenden des PdvL auf einen Massenpunkt führt auf das Newtonsche Gesetz. Ein Massenpunkt kann als materieller Punkt idealisiert werden, wenn

- eventuelle Rotationen und Deformationen des Körpers nicht interessieren,
- und eventuelle Rotationen und Deformationen des Körpers die Resultierende der äusseren Kräfte nicht verändern.

Die Trägheitskraft am materiellen Punkt ergibt sich durch Integration über den materiellen Punkt:

$$\vec{F}^t = \int d\vec{F}^t = -\int dm\vec{a} = -m\vec{a} \tag{30}$$

Newtonsches Gesetz:

$$m\vec{a} = \vec{R} \qquad \text{oder} \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \dot{\vec{p}} = \vec{R} \tag{31}$$

Das Newtonsche Gesetz definiert zusammen mit den Anfangsbedingungen ein *Anfangswertproblem.* In deses Gesetz geht die *Resutlierende der wirklichen Kräfte* ein, es gibt in diesem Kontext *keine Trägheitskräfte* mehr!

Rezept zum Lösen von Kinetik-Aufgaben:

1. Modellbildung und Abgrenzung des materiellen Systems, ev. System trennen.
2. In *allgemeiner* Lage (nicht in der Anfangslage!) alle angreifenden Kräfte einführen.
3. Wahl eines Zweckmässigen Koordinatensystems.
4. Bewegungsdifferenzialgleichungen für alle Komponenten formulieren.
5. Falls nützlich, auch den Energiesatz aufstellen.
6. Formulierung der Anfangsbedingungen; Auflösung nach den gesuchten Grössen.
7. Diskussion der Resultate.

4.4 Energiesatz

Kinetische Energie: Die gesamte kinetische Energie eines Systems berechnet sich zu:

$$\tau = \frac{1}{2} \iiint v^2 \, dm \qquad \text{und für Massepunkt:} \quad \tau = \frac{1}{2} m v^2 \tag{32}$$

Energiesatz: Allgemeingültige Form: Beziehung zwischen der Leistun der wirklichen inneren und äusseren Kräfte und der Änderung der kinetischen Energie. Für *Massenpunkte* folgt er aus dem Newtonschen Gesetz, ist also keine unabhängige Gleichung!

$$\dot{\tau} = \wp = \wp^{(i)} + \wp^{(a)} \tag{33}$$

Konservatives Kraftfeld: Man nennt ein Kraft(vektor)feld $\vec{F}(\vec{r})$ *koservativ,* wenn es sich als (negativer) Gradient einer Potentialfunktion $\nu(\vec{r})$ schreiben lässt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \nu \qquad \vec{F}(x, y, z) = -\left(\nu_x(x, y, z), \nu_y(x, y, z), \nu_z(x, y, z)\right) \tag{34}$$

Die zugehörige Potentialfunktion $\nu(\vec{r})$ ist nur bis auf eine *Normierungskonstante* bestimmt, die man frei wählen kann.

Beispiele für konservative Kraftfelder: Homogenes Schwerefeld ($F_G = -mg$, $\nu_H = mgz$), Newtonsches Potential (Gravitation) ($F_G(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, $\nu_G = -G\frac{m_1 m_2}{r}$, G: Gravitationskonstante), Coulombsches Potential ($F_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r}$, $\nu_C(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r}$), Federkraft ($F_F = -cr$, $nu_F = \frac{cr^2}{2}$).

Konservatives System: Das ist ein System, bei dem alle inneren und äusseren Kräfte sowie die Bindungskräfte konservativ sind oder keine Arbeit leisten.

Gesamtleistung konservativer Kräfte: Die Gesamtleistung der (inneren und äusseren) konservativen Kräfte berechnet sich zu:

$$\wp = -\dot{\nu} \tag{35}$$

Energiesat für konservative Systeme: In einem konservativen Sysem bleibt während der Bewegung die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie konstant.

$$\eta = \tau + \nu = const. \tag{36}$$

Durch Vergleich der gesamten Energie zu zwei geeigneten Zeitpunkten kann man oft ohne Integration der Bewegungsgleichungen Schlüsse ziehen.

4.5 Impulssatz, Massenmittelpunktsatz und Drallsatz

Impuls und Impulssatz: Der Impuls eines Körpers B wird definiert als

$$\vec{p} = \iiint_B \vec{v} \, dm \tag{37}$$

und es gilt der Impulssatz, der die Impulsänderung mit der resultierenden Kraft verknüpft:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{R} \tag{38}$$

Massenmittelpunktsatz: Betrachtet man den Massenmittelpunkt C eines Körpers, so bewegt dieser sich nach dem Newtonschen Gesetz, unabhängig von der Beschaffenheit des Körpers. Man kann also den Impulssatz anders schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}_C) = m\vec{a}_C = \vec{R} \tag{39}$$

Drall und Drallsatz: Der Drall $\vec{L}_O$ bezüglich O ist definiert als:

$$\vec{L}_O = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v}\, dm \tag{40}$$

Der Drallsatz *bezüglich eines inertialen Punktes* lautet:

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O \tag{41}$$

Relativer Drall $\vec{L}_C$ bezüglich des Massenmittelpunktes: Man möchte den Drallsatz nicht nur bezüglich eines Ortsfesten Punktes O anwenden können, sondern auch bezüglich eines *körpereigenen* Bezugspunktes. Dies geht einfach für den Massenmittelpunkt C:

$$\vec{L}_C = \iiint_B r' \times v'\, dm \qquad \vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{p} + \vec{L}_C \tag{42}$$

Die rechte Formel ist die Umrechung zwischen dem Drall bezüglich eines ortsfesten Punktes und demjenigen bezüglich des Massenmittelpunktes. r' bezeichnet den Abstand zum Massenmittelpunkt.

Schliesslich ergibt sich der Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes als:

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C \tag{43}$$

Beachte aber: Der Drallsatz gilt nur den beiden obigen Formen, entweder bezüglich eines ortsfesten Punktes oder als relativer Drall bezüglich des Massenmittelpunktes; nicht jedoch bezüglich beliebiger bewegter Punkte!

4.6 Kinetik von ebenen Bewegungen

Da Drall etc. im 3D etwas mühsam: Ebene Situationen betrachten!

Drall und Drallsatz in der Ebene: Betrachte Rotation eines ebenen Körpers um einen festen Punkt O und sei weiter I_0 das Massenträgheitsmoment bezüglich O. Dann berechnet sich der Drall bezüglich O gemäss:

$$L_O = I_O\omega \qquad I_O = \iint_B r^2\, dm \tag{44}$$

Der Drallvektor steth senkrecht auf der Ebene. Weiter folgt der Drallsatz bezüglich O in der Ebene:

$$\dot{L}_O = I_O\dot{\omega} = M_O \tag{45}$$

Drall (Drehrichtung) und Moment müssen in die selbe Richtung *positiv* gezählt werden.

Relativer Drall L_C bezüglich des Massenmittelpunktes C: Analog zum 3D kann man auch im Ebenen den relativen Drall bezüglich des Massenmittelpunktes berechnen:

$$L_C = I_C \omega \qquad I_C = \iint_B r'^2 \, dm \tag{46}$$

r' ist der Abstand ztum Massenmittelpunktes und $v' = r'\omega$ die entsprechende Geschwindigkeit des infinitesimalen Massenelements, die senkrecht auf r' steht.

Nun kann man ebenfalls den Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes für ebene Bewegungen formulieren:

$$\dot{L}_C = I_C \dot{\omega} = M_C \tag{47}$$

Kinetische Energie in der Ebene: Wenn man allgemein die Geschwindigkeitsvektoren der Massenelemente zerlegt ($\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}'$) so kann man die gesamte kinetische Energie als Summe von Translationsenergie τ_t und relativer kinetischer Energie τ_r berechnen, wobei gilt:

$$\tau_t = \frac{m}{2} v_C^2 \qquad \tau_r = \frac{1}{2} I_C \omega^2 \qquad \tau = \tau_t + \tau_r \tag{48}$$

Wobei die obige Gleichung für τ_r nur bei *ebenen Bewegungen starrer Körper* gilt. Allgemeiner ist:

$$\tau_r = \frac{1}{2} \iiint_B v'^2 \, dm \quad \text{und für starre Körper:} \quad = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_C \tag{49}$$

5 Diverses

Wichtige Werte trigonometrischer Funktionen:

α	$0°$ (0)	$30°$ $(\frac{\pi}{6})$	$45°$ $(\frac{\pi}{4})$	$60°$ $(\frac{\pi}{3})$	$90°$ $(\frac{\pi}{2})$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\cot\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Ansätze zur Lösung von Differentialgleichungen:

$$\ddot{x} = k \qquad x(t) = \frac{k}{2} t^2 + c_1 t + c_2 \tag{50}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \tag{51}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = k \qquad x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2} \tag{52}$$

$$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0 \qquad x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + c_2 \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{53}$$

$k, \lambda, c_1, c_2, \omega$ sind Konstanten.

Index