

Mechatronik

Jonas Huber
huberjo@ee.ethz.ch

Juni 2010

Diese Zusammenfassung enthält die wichtigsten Formeln etc. aus der Vorlesung „Mechatronik“ am D-ITET der ETH Zürich, so wie sie im Frühlingssemester 2010 von Dr. Gempp, Dr. Schöb und Dr. Rohner gehalten worden ist. Weiter wurden ergänzende Informationen wie z. B. Korrespondenztabelle für Fourier- und Laplace-Transformationen angefügt.

Inhaltsverzeichnis

1 Aktoren	2
2 Sensoren	5
3 Signale	7
4 Magnetlager	9
4.1 Aktives Magnetlager als Regelstrecke	9
4.2 Kraftentwicklung im Magnetlager	9
4.3 Wickelraum und Verlustleistung	10
4.4 Zeitkonstanten	10
5 Linearmotoren	11
5.1 Regelung	11
6 Tabellen	12
6.1 Selected Laplace Transforms	12
6.2 Selected Fourier Transforms	13

1 Aktoren

Energiewandler

$$P_{zu} = P_{ab} + \dot{Q} \tag{1}$$

P_{zu} : zugeführte Leistung; P_{ab} : abgeführte Leistung; \dot{Q} : Verlustleistung.

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \tag{2}$$

Leistungsformen

Leistungsform	verallg. Potentialgrösse p	verallg. Flussgrösse f	Leistung $P = pf$
mech. transl.	Geschwindigkeit v	Kraft F	$P_{tr} = vF$
mech. rot.	Winkelgeschw. ω	Moment M	$P_{rot} = \omega M$
elektrisch	Spannung U	Strom I	$P_{el} = UI$
fluidisch	Druck p	Volumenstrom \dot{V}	$P_{fl} = p\dot{V}$
thermisch	Temp.-Diff. ΔT	Wärmedurchgang kA	$P_{th} = \Delta T kA$

Elektrodynamischer Wandler

translatorisch:
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k/m \\ -k/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \cdot U$$

rotatorisch:
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_\varphi/J \\ -k_\varphi/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \cdot U$$

$$M = k_\varphi \cdot I$$

k bzw. k_φ : Aktorkonstante; I : Spulenstrom; v bzw. ω : (Winkel-)geschwindigkeit; R : Spulenwiderstand; L : Spuleninduktivität; U : Klemmenspannung; J : Trägheitsmoment; M : Drehmoment.

Stern-Dreieck-Schaltung

$$U_{\text{Stern}} = \frac{U_{\text{Dreieck}}}{\sqrt{3}}$$

$$I_{\text{Stern}} = \frac{I_{\text{Dreieck}}}{\sqrt{3}}$$

$$P_{\text{Stern}} = \frac{P_{\text{Dreieck}}}{3}$$

Wenn beim Anlaufen ein Motor in Stern statt im Dreieck geschaltet wird, betragen die Anzugsleistung und das Anzugsmoment *nur ein Drittel* der Werte, die beim Anfahren direkt mit Dreieckschaltung auftreten würden.

Asynchronmaschine

- ESB

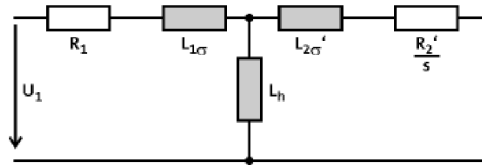


Abb. 1: Ersatzschaltbild der ASM. L_h : Hauptinduktivität; L_σ : Streuinduktivität; R'_2 : Rotorwiderstand; R_1 : Statorwiderstand; U_1 : Strangspannung; s : Schlupf.

$$P = \eta \cdot P_\delta \text{ mit } P_\delta: \text{Leistung über } \frac{R'_2}{s}.$$

- Drehzahl der ASM:

$$n = f \cdot \frac{60}{p} \cdot (1 - s)$$

n : Rotordrehzahl; f : Statorfrequenz; p : Polpaarzahl; s : Schlupf.

- Kenngrößen der ASM:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_N \cdot \cos \varphi \cdot \eta \quad \text{mit } R_1 = 0$$

$$M = \frac{P}{2\pi} \cdot f = P\omega$$

U_N : Nennspannung (verkettet); I_N : Nennstrom; f_N : Statornennfrequenz; n_N : Nenndrehzahl; M_0 : Anlaufmoment; M_{max} : max. Drehmoment; M_N : Nenndrehmoment; P_N : Nennleistung; $\cos \varphi$: Phasenwinkel $U \dots I$; η : mech. Wirkungsgrad.

- Kennlinie der ASM:

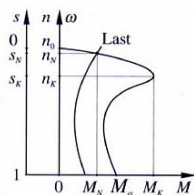
$$\frac{M}{M_K} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}}$$

$$\frac{M}{M_K} \approx 2 \frac{s}{s_k} \quad \text{für } s \text{ klein}$$

$$s_k = \frac{R'_2}{X_\sigma} \quad \text{mit } X_\sigma = 2\pi \cdot f(L_{1\sigma} + L'_{2\sigma})$$

$$M_k = p \cdot \frac{3}{2\pi f} \cdot \frac{U_{\text{Str}}^2}{2X_\sigma}$$

M : Drehmoment; s : Schlupf; M_K : Kippm.; s_K : Kippschlupf; M_N : Nennm.; s_N : Nennschl.



Fluidischer (hydraulischer) Aktor

Vorsicht: Beim Verwenden dieser (Näherungs-)formeln müssen die Grössen unbedingt in den unten angegebenen *Einheiten* eingesetzt werden!

$$\Delta p = 20 \cdot \pi \frac{M_d}{V_g \cdot \eta_{mh}}$$
$$\dot{V} = \frac{V_g \cdot n}{1000 \cdot \eta_{vol}}$$
$$M_d = \frac{30000 P}{\pi n}$$

\dot{V} : Volumenstrom [l/min]; Δp : Differenzdruck [bar]; P : Leistung [kW]; M_d : Drehmoment [Nm];
 n : Drehzahl [rpm]; V_g : Nennvolumen [cm³]; η_{mh} : Mechanisch-Hydraulischer Wirkungsgrad [0.9..0.95];
 η_{vol} : Volumen-Wirkungsgrad [0.9..0.95].]

2 Sensoren

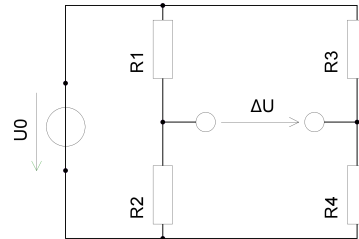
Messfehler

$$\delta_{Mess} = \frac{\text{Fehler}}{\text{Messbereich}}$$

Beachte, dass der Fehler immer in Prozenten des *gesamten Bereichs des Ausgangssignals*, d. h. des gesamten Messbereiches angegeben wird.

Wheatstone-Brücke

$$\Delta U = U_0 \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

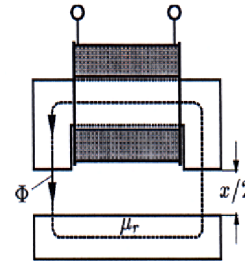


Induktiver Weggeber

$$L(x) = L_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{x_m}}$$

$$L_0 = \frac{N^2 \cdot A \cdot \mu_0}{l} \cdot \mu_r$$

$$x_m = \frac{\mu_{Luft} \cdot l}{\mu_r}$$

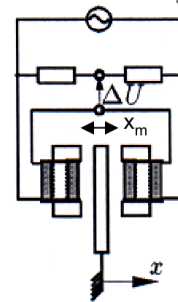


L_0 : Induktivität für $x = 0$; x_m : Weg, bei welchem $L(x) = \frac{L_0}{2}$; N : Anzahl Windungen der Spule.

Induktiver Weggeber (Differenzschaltung)

$$\Delta U \approx \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot \frac{x}{x_m}$$

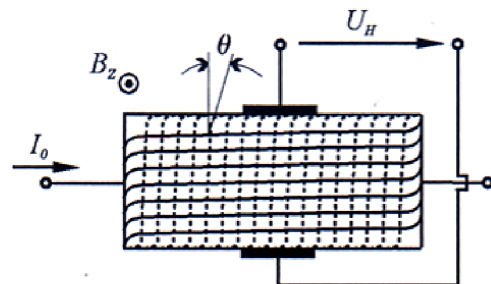
U_0 : Speisespannung; x_m : wie oben;
 ΔU : Brückenspannung (Ausgangsspannung).



Magnetfeldsensoren

$$U_H = I_0 \cdot B_Z \cdot \frac{R_H}{d}$$

U_H : Hallspannung; B_Z : Magnetfeld durch Sensor; I_0 : Strom durch Sensor;
 R_H : Hallwiderstand; k : Sensorkonstante.



Dehnmessstreifen

Beachte, dass die Leiterbahnen *senkrecht* zur zu messenden Ausdehnungsrichtung deutlich *breiter* ausgeführt werden, um die Sensitivität gegenüber Störauslenkungen in dieser Richtung zu senken.

$$R_{mess} = \rho \cdot \frac{l \pm \Delta x}{A} \tag{3}$$

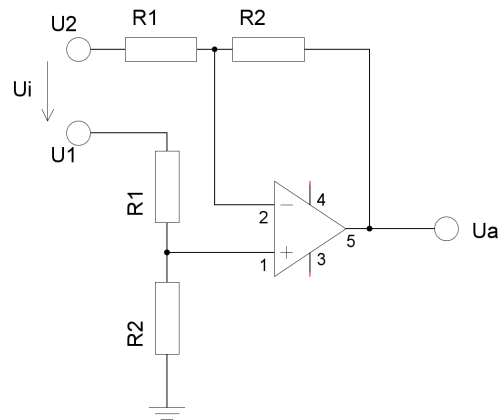
R_{mess} : Messwiderstand; l : Länge des Drahtes; A : Querschnitt des Drahtes; ρ : relativer Widerstand.

Die Auswertung erfolgt über eine Viertel-, eine Halb- oder eine Vollbrücke. Bei der Variante mit der Halb- bzw. Vollbrücke werden zwei bzw. vier Dehnmessstreifen eingesetzt, welche entgegengesetzt beansprucht werden. Durch diese Differenzbildung kann die Kennlinie linearisiert werden. Details siehe ZF zu „Sensoren 2“.

Differenzverstärker

$$U_a = -(U_2 - U_1) \cdot \frac{R_2}{R_1} = -U_i \frac{R_2}{R_1}$$

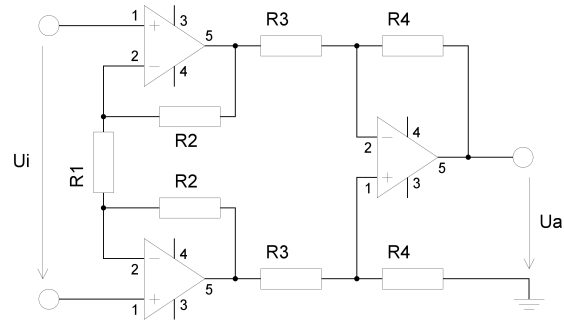
$$U_a = -(U_2 - U_1) \cdot \frac{Z_2}{Z_1} = -U_i \frac{Z_2}{Z_1}$$



Beachte, dass bei einer RC-Dämpfungsbeschaltung eine Kapazität jeweils parallel zu *beiden* R_2 geschaltet werden muss.

Instrumentationsverstärker

$$U_a = U_i \cdot \left[-\frac{R_4}{R_3} \left(\frac{2R_2}{R_1} + 1 \right) \right]$$



Sinus-Cosinus Auswertung Innerhalb eines Quadranten kann die Position mit diesem Verfahren sehr genau bestimmt werden.

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \tag{4}$$

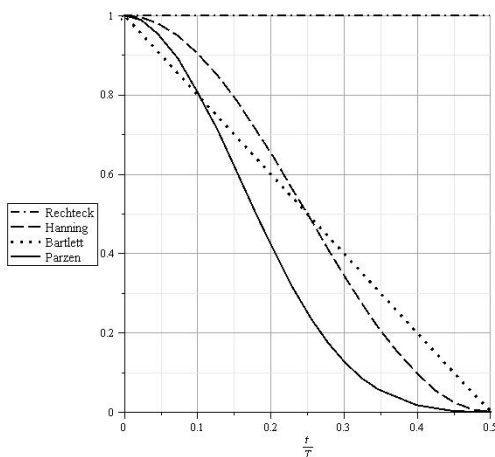
3 Signale

Signalkennwerte und -funktionen

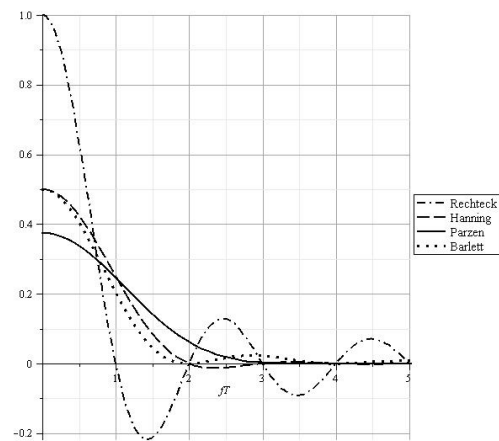
Bezeichnung	Formel
Arithmetischer Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$
Effektivwert	$\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$
Varianz	$\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 dt$
Standardabweichung	$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 dt}$
Schiefe	$\gamma_x = \frac{1}{\sigma_x^3} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^3 dt$
Kurtosiswert	$\beta_x = \frac{1}{\sigma_x^4} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^4 dt$
Autokorrelation (AKF)	$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt$
Autospektraldichte	$S_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$
Autokovarianz	$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x})(x(t + \tau) - \bar{x}) dt$ $C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \bar{x}^2$
Fourier-Spektrum	$X_T(j\omega) = \mathcal{F}\{x_T(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j\omega t} dt$
Leistungsverteilung	$E_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ X_T(j\omega) ^2}{T}$
Autospektraldichte	$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ X_T(j\omega) ^2}{T}$

Zeitfenster und zugehörige Fourier-Spektren

Bezeichnung	$w(t)$	$W(f)$
Rechteck	$w_1(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$
Bartlett (Dreieck)	$w_2(t) = \begin{cases} 1 - 2\frac{ t }{T} & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{T}{2} \left(\frac{\sin \pi f \frac{T}{2}}{\pi f \frac{T}{2}} \right)^2$
Hanning (Tukey)	$w_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right) & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{T}{2} \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \frac{1}{1 - (fT)^2}$
Parzen	$w_4(t) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{2t}{T} \right)^2 + 6 \left(\frac{2 t }{T} \right)^3 & t \leq \frac{T}{4} \\ 2 \left(1 - \frac{2 t }{T} \right)^3 & \frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{3T}{8} \left(\frac{\sin \pi f \frac{T}{4}}{\pi f \frac{T}{4}} \right)^4$



Time domain.



Frequency domain.

Satz von Shannon

Um aus einem abgetasteten Signal wieder verlustfrei das Originalsignal zu berechnen, muss die Abtastfrequenz ω_s mindestens *doppelt* so hoch sein, wie die höchste Frequenz ω_{max} , die im Originalsignal enthalten ist.

$$\omega_s > 2 \cdot \omega_{max} \quad \text{bzw.} \quad f_s > 2 \cdot f_{max} \tag{5}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, wird verhindert, dass die Spektren des abgetasteten Signals einander überlappen (*Aliasing*) und so eine Rekonstruktion unmöglich machen.

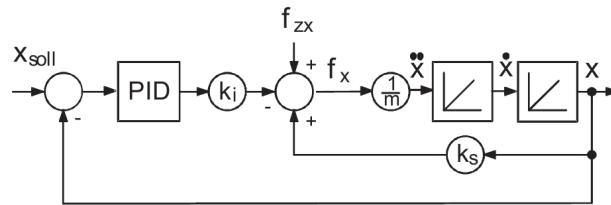
4 Magnetlager

4.1 Aktives Magnetlager als Regelstrecke

Für kleine Abweichungen vom Arbeitspunkt kann die Magnetkraft als lineare Funktion des Weges und des Stromes angegeben werden:

$$F(x, i) = k_s \cdot x + k_i \cdot i \quad \text{mit } x = X - X_0 \text{ und } i = I - I_0 \quad (6)$$

k_s : Kraft-Weg-Faktor, $k_s < 0$; k_i : Kraft-Strom-Faktor, $\text{sign}(k_i) = \text{sign}(I_0)$, wobei I_0 den Arbeitspunktstrom bezeichnet.

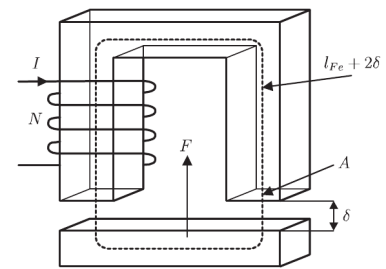


4.2 Kraftentwicklung im Magnetlager

$$B = \frac{n \cdot i \cdot \mu_0}{2\delta + \frac{l_{Fe}}{\mu_{r,Fe}}} \approx \mu_0 \frac{n \cdot i}{2\delta} \quad \text{weil } \mu_{r,Fe} \gg 1 \Rightarrow 2\delta \gg \frac{l_{Fe}}{\mu_{r,Fe}}$$

$$F = \frac{B_\delta^2 \cdot 2A_\delta}{2\mu_0} = \frac{n^2 i^2 \mu_0 \cdot 2A_\delta}{\left(2\delta + \frac{l_{Fe}}{\mu_{r,Fe}}\right)^2} \approx 40 \text{ N cm}^{-2} \text{ T}^{-2} \cdot 2A_\delta \cdot B_\delta^2$$

$$\Theta = ni \approx B \cdot \left(2\delta + \frac{l_{Fe}}{\mu_{r,Fe}}\right) \cdot 800 \text{ A T}^{-1} \text{ mm}^{-1}$$



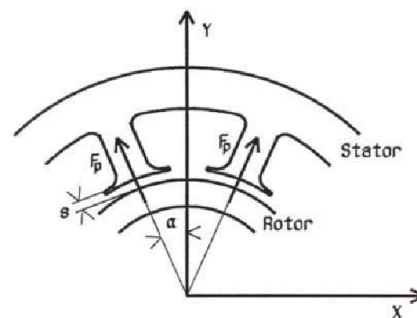
i : Strom [A]; δ : Luftspaltlänge eines (!) Luftspalts [m]; B : Flussdichte [T]; B_δ : Flussdichte im Luftspalt [T]; n : Windungszahl; l_{Fe} : Eisenweglänge [m]; $\mu_{r,Fe}$: relative Permeabilität; Θ : Durchflutung [A]; A_δ : Polfläche [m²].

Wenn die Polflächen *nicht parallel* zueinander stehen, muss dies berücksichtigt werden:

$$F_y = 2F_p \cos \alpha$$

Bei 8 Polen ist beispielsweise $\alpha = 22.5^\circ$.

Vorsicht: für das F aus obigen Formeln gilt bereits $F = 2F_p$.



4.3 Wickelraum und Verlustleistung

Wickelraum

$$A_{Cu} = \frac{\Theta}{S}$$

$$A_{Spule} = \frac{A_{Cu}}{k_f}$$

A_{Cu} : Kupferfläche; A_{Spule} : Wicklungsfläche; Θ : Durchflutung [A Wdg]; S : Thermisch zulässige Stromdichte im Kupfer; k_f : Füllfaktor.

Verlustleistung Die Verlustleistung berechnet sich aus den ohm'schen Verlusten im Kupfer der Windungen:

$$P_{Cu} = \frac{\rho \cdot l_{Cu,avg}}{A_{Cu}} \cdot \Theta^2 = \frac{\rho \cdot l_{Cu,avg}}{A_{Cu}} \cdot n^2 i^2$$

$l_{Cu,avg}$: mittlere Windungslänge; A_{Cu} : Kupferquerschnitt.

4.4 Zeitkonstanten

Der unterlagerte Stromregler ist nur vernachlässigbar, wenn gilt:

$$2..3 \cdot T_{el} < T_{mech} \quad \text{für grosse Systeme}$$

$$5..10 \cdot T_{el} < T_{mech} \quad \text{für kleine Systeme}$$

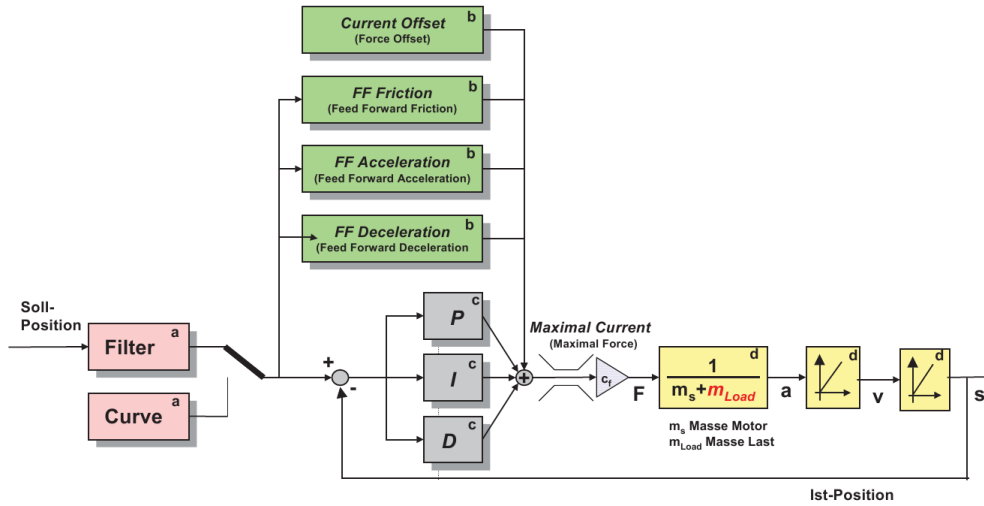
$$T_{mech} = \frac{2\pi}{\omega_{mech}} \quad \omega_{mech} = \sqrt{\frac{k_x}{m_{Rotor}}}$$

$$T_{el} = \frac{L \cdot \Delta I}{U} \quad \text{mit } L = \frac{\mu_0 A_\delta N^2}{2\delta}$$

Die Formel für L liefert aber immer zu hohe Werte: bis ca. 100 Hz liegen die Werte um 30 %-40 % zu hoch.

5 Linearmotoren

5.1 Regelung



Die verschiedenen Farben beschreiben verschiedene Teilgruppen: a) Begrenzung der Anforderungen; b) Applikationswissen; c) PID-Regler; d) Mechanische Komponenten.

6 Tabellen

6.1 Selected Laplace Transforms

Number	Time Function $f(t), t \geq 0$	Laplace Transform $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^2	$\frac{2!}{s^3}$
5	t^3	$\frac{3!}{s^4}$
6	t^m	$\frac{m!}{s^{m+1}}$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
8	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
9	$\frac{1}{2!}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$
10	$\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^m}$
11	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12	$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
13	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
14	$(1 - at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
15	$1 - e^{-at}(1 + at)$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
16	$ae^{-at} - be^{-bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
18	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
19	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
20	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
21	$1 - e^{-at} (\cos bt + \frac{a}{b} \sin bt)$	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$

Source: Franklin, F. G., Powell, J. D. and Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 2009. Fifth Edition. Pearson. New Jersey.

6.2 Selected Fourier Transforms

These fourier transforms are using the *angular frequency* w and are *non-unitary*:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \tag{7}$$

Number	Time Function $f(t)$	Fourier Transform $F(\omega)$
1	1	$2\pi\delta(\omega)$
2	$\delta(t)$	1
3	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega - a)$
4	$\cos at$	$\pi (\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a))$
5	$\sin at$	$j\pi (\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a))$
6	$\cos at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
7	$\sin at^2$	$-\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sin\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
8	t^n	$2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$
9	$\frac{1}{t}$	$-j\pi \text{sgn}(\omega)$
10	$\sigma(t)$	$\pi \left(\frac{1}{j\pi\omega} + \delta(\omega)\right)$
11	$e^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
12	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
13	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
14	$\text{rect}(at)$	$\frac{1}{ a } \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$

Rectangular function:

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } |t| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

(Normalized) sinc function:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Source: Wikipedia, Fourier transform, http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform (as of June 24, 2010, 06:15 GMT).